ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι **Χειμερινό Εξάμηνο 2026-2027**

2η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Διδάσκων: **Ν. Μιχελακάκης**

2.1 Για τα παρακάτω δυο συστήματα, βρείτε τους αντίστοιχους πίνακες και επαυξημένους πίνακες:

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array} , \quad \begin{array}{rrrrcr} x_2 & -2x_1 & +x_3 & & = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & & -x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & +x_4 & = & -1 \end{array} .$$

2.2 Βρείτε δυο γραμμικά συστήματα των οποίων οι επαυξημένοι πίνακες να δίνονται από τους πιο κάτω πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} .$$

2.3 Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss, λύσατε τα συστήματα

1.

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & & -x_4 & = & 2 \\ & & x_3 & +x_4 & = & -1 \end{array} ,$$

2.

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{array} .$$

2.4 Έστω $y = ax^2 + bx + c$, το κλασικό τριώνυμο, και (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) τρεις λύσεις αυτού. Δείξτε ότι οι συντελεστές μπορούν να βρεθούν ως λύση γραμμικού συστήματος.

2.5 Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 \\ 2x_2 & + & x_1 & - & x_3 & = & y_2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & y_3 \end{array} .$$

Να διερευνηθεί το σύστημα ως προς τις λύσεις του.

2.6 Έστω πίνακας,

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τους πίνακες, $A(B + (-2A)^T)$ και $[A^T(3A - B^T)]^T$.

2.7 Δείξτε, υπολογίζοντας κατ' ευθείαν τον αντίστροφο, ότι κάθε πίνακας πού αντιστοιχεί σε στοιχειώδη γραμμοισοδυναμία είναι αντιστρέψιμος.

2.8 Να υποδειχθούν όλες οι δυνατές βαθμωτές μορφές ενος πίνακα 2×4 και ενος πίνακα 3×3. Μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα που να αφορά στο πλήθος τους για ένα πίνακα $n \times m$.

2.9 Δείξτε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας, A, που μπορεί να έρθει σε βαθμωτή μορφή χωρίς ανταλλαγές γραμμών μπορεί να γραφεί ως γινόμενο, $A = LU$, ενός κάτω τριγωνικού (αντιστρέψιμου) πίνακα, L, και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U.

2.10 Είναι οι πιο κάτω πίνακες αντιστρέψιμοι και αν ναι, βρείτε τον αντίστροφό τους,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.11 Αν B είναι ο πίνακας της άσκησης 2.6 να υπολογιστεί ο πίνακας $B(B^TB)^{-1}B^T$. Δείξτε ότι αν $M = I - B(B^TB)^{-1}B^T$ ο πίνακας $B^TM = 0$. Ισχύει το συμπέρασμα αυτό για οποιοδήποτε πίνακα B;

2.12 Διερευνήστε το σύστημα και υπολογίστε τις λύσεις του συναρτήσει της παραμέτρου λ

$$\begin{array}{rrrcr} -4x_1 & +5x_2 & -\lambda x_3 & = & 5-\lambda \\ 4x_1 & +6x_2 & +4x_3 & = & 14 \\ 7x_1 & +5x_2 & +3x_3 & = & 8 \end{array}$$