

## 5. Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε εκτενώς με την εκτίμηση των παραμέτρων διαφόρων κατανομών. Για παράδειγμα είδαμε ότι η καλύτερη εκτιμήτρια για την εκτίμηση της μέσης τιμής ενός κανονικού πληθυσμού  $N(\mu, \sigma^2)$  είναι η  $\bar{X}$ . Δεδομένου λοιπόν ενός τ.δ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από  $N(\mu, \sigma^2)$ , π.χ. σωματικά βάρη 20 φοιτητών (σε kgr):

73, 81, 84, 77, 71, 75, 71, 76, 63, 69, 85, 77, 71, 81, 71, 76, 79, 68, 72, 71

μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέσο βάρος των φοιτητών της σχολής:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{20} (73+81+84+77+71+75+71+76+63+69+85+77+71+81+71+76+79+68+72+71) \\ = 74.55.$$

Αρα εκτιμούμε ότι το μέσο βάρος  $\mu$  των φοιτητών («πληθυσμιακό» βάρος) είναι 74.55 kgr («δειγματικό» βάρος). Εκτιμήσεις αυτής της μορφής καλούνται σημειακές εκτιμήσεις διότι εκτιμούμε την άγνωστη παράμετρο μίας κατανομής μέσω κάποιου σημείου (εδώ το 74.55) το οποίο θεωρητικά πρέπει να είναι «κοντά» στην παράμετρο με «μεγάλη» πιθανότητα (σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε, αν πάρουμε αρκετά δείγματα τότε τα αντίστοιχα  $\bar{X}$  που θα υπολογίζουμε θα παίρνουν τιμές «κοντά» και «γύρω» από το  $\mu$  με «μεγάλη» πιθανότητα). Όλες οι εκτιμήσεις που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ήταν προφανώς σημειακές. Η εκτίμηση μίας παραμέτρου  $\theta$  ή μίας παραμετρικής συνάρτησης  $g(\theta)$  γίνονταν με τη βοήθεια μίας εκτιμήτριας συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής)  $T(\mathbf{X})$  που βάσει ενός τ.δ.  $\mathbf{X}$  προσφέρει μία σημειακή εκτίμηση του  $g(\theta)$ .

Η σημειακή όμως εκτίμηση, αν και μας δίνει μία τιμή  $T(\mathbf{X})$  (ένα σημείο) που πρέπει να είναι κοντά στην υπό εκτίμηση συνάρτηση  $g(\theta)$ , δεν μας δίνει καμία ιδέα για την ακρίβεια ή το σφάλμα της εκτίμησης. Στο παράδειγμα που αναφέραμε παραπάνω είδαμε ότι, βάσει του συγκεκριμένου δείγματος που πήραμε, μία εκτίμηση του μέσου βάρους είναι το  $\bar{X} = 74.55$ . Πόσο κοντά όμως στο πραγματικό πληθυσμιακό βάρος  $\mu$  είναι αυτή η τιμή; Πόσο πιθανό είναι π.χ. το  $\mu$  να απέχει από το  $\bar{X}$  περισσότερο από 5 kgr;

Θα ήταν συνεπώς προτιμότερο αν μπορούσαμε να πούμε ότι, βάσει του συγκεκριμένου τυχαίου δείγματος, το  $\mu$  βρίσκεται με κάποια «πιθανότητα» μεταξύ δύο τιμών (π.χ.  $72 \text{ kgr} < \mu < 78 \text{ kgr}$  με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%). Έτσι, για παράδειγμα θα μπορούσαμε να πούμε με κάποια βεβαιότητα ότι το πραγματικό πληθυσμιακό βάρος δεν μπορεί να είναι μικρότερο π.χ. των 72 kgr. Ένα τέτοιο διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκεται η υπό εκτίμηση παράμετρος με μεγάλη πιθανότητα καλείται διάστημα εμπιστοσύνης. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 5.1.** Έστω ένα τυχαίο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από μία κατανομή με σ.π. ή σ.π.π.  $f(x; \theta)$  και  $g(\theta)$  μία παραμετρική συνάρτηση που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Έστω επίσης δύο στατιστικές συναρτήσεις  $L(\mathbf{X}) = L(X_1, X_2, \dots, X_n)$  και  $U(\mathbf{X}) = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Το τυχαίο διάστημα

$$[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$$

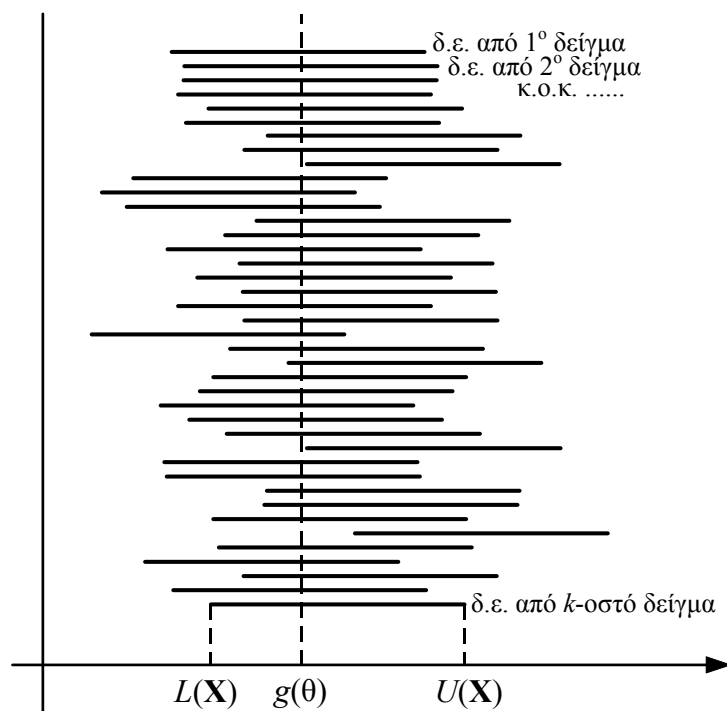
καλείται *διάστημα εμπιστοσύνης* (δ.ε.) για την παραμετρική συνάρτηση  $g(\theta)$  σε *επίπεδο σημαντικότητας*  $1-\alpha$  αν ισχύει ότι

$$P(g(\theta) \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]) = P(L(\mathbf{X}) \leq g(\theta) \leq U(\mathbf{X})) \geq 1 - \alpha$$

(π.χ.  $\alpha=1\%$ ,  $5\%$  ή  $10\%$ ). Αν η τελευταία σχέση ισχύει ως ισότητα τότε το  $1-\alpha$  θα καλείται *συντελεστής εμπιστοσύνης*.

Επομένως, αν δεδομένου ενός τ.δ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , βρούμε στατιστικές συναρτήσεις  $L(\mathbf{X})$  και  $U(\mathbf{X})$  όπως παραπάνω τότε μπορούμε να πούμε ότι η παραμετρική συνάρτηση την οποία επιθυμούμε να εκτιμήσουμε βρίσκεται μέσα στο διάστημα  $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$  με πιθανότητα (τουλάχιστον) 1

–α. Αν δηλαδή παίρναμε πάρα πολλά δείγματα και υπολογίζαμε κάθε φορά το  $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$  τότε θεωρητικά το  $g(\theta)$  θα βρισκόταν μέσα σε τουλάχιστον  $100(1-\alpha)\%$  των διαστημάτων αυτών. Σχηματικά:



Στη συνέχεια θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε διαστήματα εμπιστοσύνης για παραμέτρους κανονικών πληθυσμών, αφού ως γνωστό η συνηθέστερη κατανομή που συναντάται στις εφαρμογές (λόγω και του Κ.Ο.Θ.) είναι η κανονική.

**α. Διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο κανονικής κατανομής όταν  $\sigma^2$  γνωστό.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από  $N(\mu, \sigma^2)$  με  $\sigma^2$  γνωστό. Ζητάμε να βρούμε ένα διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκεται το  $\mu$  με πιθανότητα  $1-\alpha$ . Επειδή ο δειγματικός μέσος  $\bar{X}$  είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\mu$  θα αναζητήσουμε ένα διάστημα της μορφής

$$[\bar{X} - d, \bar{X} + d].$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το  $d$  θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να ισχύει

$$P(\mu \in [\bar{X} - d, \bar{X} + d]) = P(\bar{X} - d \leq \mu \leq \bar{X} + d) = 1 - \alpha.$$

Είναι γνωστό ότι ο δειγματικός μέσος  $\bar{X}$  προερχόμενος από κανονικό δείγμα είναι κανονικός (κάθε γραμμική συνάρτηση ανεξάρτητων τ.μ. από την κανονική κατανομή ακολουθεί κανονική κατανομή). Και επειδή, ως γνωστό,

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

ισχύει ότι

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1).$$

Επομένως, το  $d$  θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε,

$$P(\bar{X} - d \leq \mu \leq \bar{X} + d) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(-d \leq \bar{X} - \mu \leq d) = 1 - \alpha$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow P\left(\frac{-d}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq \frac{d}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)=1-a \Leftrightarrow P\left(\frac{-d}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq Z \leq \frac{d}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)=1-a \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)-\Phi\left(-\frac{d}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)=1-a \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)-1+\Phi\left(\frac{d}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)=1-a \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)=1-a/2. \end{aligned}$$

Επομένως, αν  $\Phi^{-1}$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $\Phi$  (η  $\Phi$  ως γνήσια αύξουσα συνάρτηση είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται) θα ισχύει ότι

$$\frac{d}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \Phi^{-1}(1-a/2) \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Phi^{-1}(1-a/2).$$

Επομένως ένα δ.ε. για το  $\mu$  συντελεστού  $1-a$  θα είναι το

$$[\bar{X}-d, \bar{X}+d] = [\bar{X} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Phi^{-1}(1-\frac{a}{2}), \bar{X} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Phi^{-1}(1-\frac{a}{2})].$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το παραπάνω δ.ε. εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που τα  $X_i$  προέρχονται από οποιονδήποτε πληθυσμό (όχι απαραίτητα κανονικό), υπό την υπόθεση ότι το  $n$  είναι σχετικά μεγάλο (από το Κ.Ο.Θ., βλ. και Ασκ. 5.7).

**Παράδειγμα** (συνέχεια). Ένα διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστού  $1-a=95\%$  για το μέσο βάρος των φοιτητών στο παραπάνω παράδειγμα, θα είναι ( $n=20$ ,  $\bar{X}=74.55$  και π.χ. γνωρίζουμε ότι  $\sigma=5$ ),

$$[74.55 - \frac{5}{\sqrt{20}} \Phi^{-1}(1-\frac{0.05}{2}), 74.55 + \frac{5}{\sqrt{20}} \Phi^{-1}(1-\frac{0.05}{2})].$$

Από πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι  $\Phi^{-1}(1-0.05/2) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$  (δηλαδή,  $\Phi(1.96)=0.975$ ) και επομένως το παραπάνω διάστημα θα είναι ίσο με το

$$[74.55 - \frac{5}{\sqrt{20}} 1.96, 74.55 + \frac{5}{\sqrt{20}} 1.96] = [74.55 - 2.19, 74.55 + 2.19] = [72.36, 76.74].$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι, σύμφωνα με το τυχαίο δείγμα που πήραμε και δεδομένου ότι  $\sigma=5$ , το μέσο βάρος των φοιτητών βρίσκεται μεταξύ του 72.36 και 76.74 με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

Αξίζει σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι στην παραπάνω άσκηση αλλά και σε όσες ακολουθούν χρησιμοποιούμε εκφράσεις της μορφής:

«το  $\mu$  βρίσκεται μεταξύ του 72.36 και 76.74 με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%»

υποδηλώνοντας ότι αν παίρναμε ένα μεγάλο πλήθος από δείγματα, και για το καθένα κατασκευάζαμε ένα δ.ε. για το  $\mu$ , τότε θα αναμέναμε ότι το 95% των δ.ε. θα συμπεριλάμβανε το  $\mu$ .

Επειδή στη συνέχεια θα συναντάμε συχνά ποσότητες της μορφής  $F^{-1}(1-a)$  όπου  $F$  είναι μία συνάρτηση κατανομής (π.χ.  $\Phi^{-1}(1-a/2)$ ), θα χρησιμοποιούμε ειδικό συμβολισμό. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 5.2.** Έστω  $X$  μία τ.μ. με σ.κ.  $F$ . Αν  $\alpha$ -σημείο της κατανομής με σ.κ.  $F$  καλείται το σημείο  $h$  για το οποίο ισχύει ότι

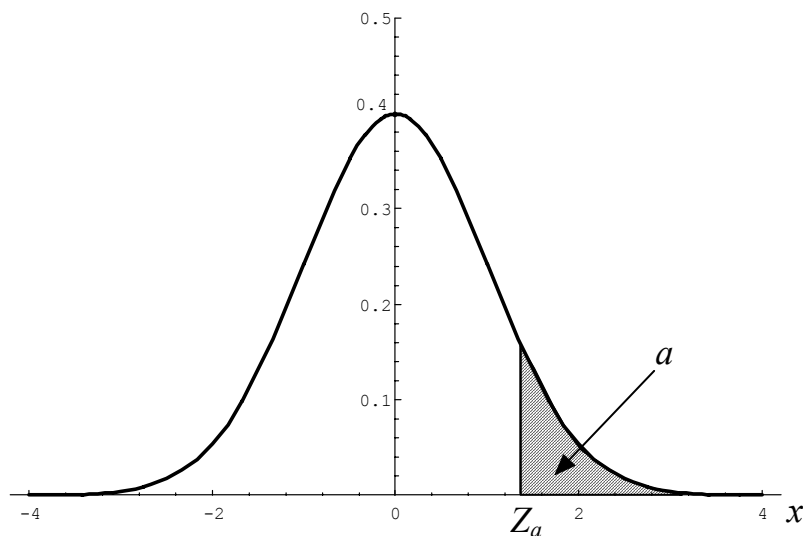
$$P(X > h) = \alpha$$

ή ισοδύναμα,  $1 - F(h) = a \Leftrightarrow h = F^{-1}(1 - a)$ , και επομένως το άνω  $\alpha$ -σημείο μιας κατανομής  $F$  θα είναι το  $F^{-1}(1 - a)$ .

Το άνω  $\alpha$ -σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής συνήθως συμβολίζεται με  $Z_\alpha = \Phi^{-1}(1 - a)$ . Επειδή, ως γνωστό, η σ.κ. της τυπικής κανονικής  $\Phi$  δεν δίνεται από κάποιο εύκολα αντιστρέψιμο τύπο, για την εύρεση άνω  $\alpha$ -σημείων της  $N(0,1)$  θα χρησιμοποιούμε κατάλληλους πίνακες ή π.χ. τον πίνακα της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής  $\Phi$ . Μερικές τιμές του  $Z_\alpha$  για συνήθη  $\alpha$  είναι:

| $\alpha$   | 0.10 | 0.05  | 0.025 | 0.005 |
|------------|------|-------|-------|-------|
| $Z_\alpha$ | 1.28 | 1.645 | 1.96  | 2.58  |

Για να δούμε σχηματικά ποιο είναι το άνω  $\alpha$ -σημείο μιας κατανομής παίρνουμε το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας αυτής της κατανομής. Έστω ότι έχουμε τυπική κανονική κατανομή. Το άνω  $\alpha$ -σημείο  $Z_\alpha$  θα βρίσκεται στον άξονα των  $x$  έτσι ώστε το εμβαδόν κάτω από τη σ.π.π. από το  $Z_\alpha$  έως το άπειρο να είναι ίσο με  $\alpha$ :



Είτε από το παραπάνω σχήμα, είτε από τη γνωστή σχέση  $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$  αποδεικνύεται εύκολα ότι  $Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$ . Πράγματι, αν  $X \sim N(0,1)$ ,

$$P(X > -Z_\alpha) = 1 - \Phi(-Z_\alpha) = \Phi(Z_\alpha) = \Phi(\Phi^{-1}(1 - a)) = 1 - a$$

και επομένως το  $-Z_\alpha$  είναι το  $1-\alpha$ -σημείο της τυπικής κανονικής.

Δεδομένου λοιπόν ενός τ.δ.  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ , ένα δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το μέσο  $\mu$  (όταν  $\sigma^2$  γνωστό) θα είναι το

$$\left[ \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \right].$$

Παρατηρούμε ότι η γνώση του  $\sigma$  είναι προαπαιτούμενη διότι η τιμή της είναι αναγκαία για τον υπολογισμό των άκρων του διαστήματος. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο το δείγμα μεγαλώνει, τόσο το εύρος του διαστήματος μικραίνει (στενεύει), δηλαδή έχουμε καλύτερη εκτίμηση του  $\mu$ . Τέλος, αν αυξήσουμε το συντελεστή εμπιστοσύνης (θέλουμε π.χ. να έχουμε ασφαλέστερη πρόβλεψη) τότε το εύρος του δ.ε. αυξάνεται. Αναφερόμενοι στο αρχικό παράδειγμα με την εκτίμηση του μέσου βάρους, αν πάρουμε ως  $1-\alpha=99\%$  τότε το δ.ε. για το μέσο βάρος θα είναι:

$$\left[ \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \right] = \left[ 74.55 - \frac{5}{\sqrt{20}} Z_{0.005}, 74.55 + \frac{5}{\sqrt{20}} Z_{0.005} \right]$$

$$=[74.55 - \frac{5}{\sqrt{20}}2.58, 74.55 + \frac{5}{\sqrt{20}}2.58] = [71.66, 77.34].$$

Το νέο δ.ε. είναι ευρύτερο από το  $[72.36, 76.74]$  που είχαμε βρει για σ.ε.  $1-\alpha=95\%$ . Αυτό συμβαίνει διότι με το ίδιο δείγμα θέλουμε να έχουμε ένα ασφαλέστερο άνω και κάτω όριο για το  $\mu$ . Για να ελαττωθεί λοιπόν η πιθανότητα το  $\mu$  να μην βρίσκεται εντός των ορίων του δ.ε., αυτό που γίνεται είναι ότι αυξάνεται το εύρος του δ.ε.

### Γενική μέθοδος κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης:

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πως κατασκευάζουμε ένα δ.ε. για το μέσο  $\mu$  μιας  $N(\mu, \sigma^2)$  όταν  $\sigma^2$  γνωστό. Πως όμως μπορούμε γενικά να κατασκευάσουμε ένα δ.ε. για μία παραμετρική συνάρτηση  $g(\theta)$  από οποιονδήποτε πληθυσμό; Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ένα τ.δ. από την  $F(x; \theta)$ . Μία γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το  $g(\theta)$  είναι η ακόλουθη:

1) Βρίσκουμε μία στατιστική συνάρτηση  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  της οποίας η κατανομή να εξαρτάται από το  $\theta$ . Συνήθως ως  $T$  εκλέγουμε μία εκτιμήτρια του  $\theta$  ή του  $g(\theta)$ .

2) Κατασκευάζουμε συνάρτηση  $Y = h(T, g(\theta))$  η κατανομή της οποίας να μην εξαρτάται από το  $\theta$ .

3) Υπολογίζουμε δύο σταθερές  $c_1, c_2$  έτσι ώστε να ισχύει

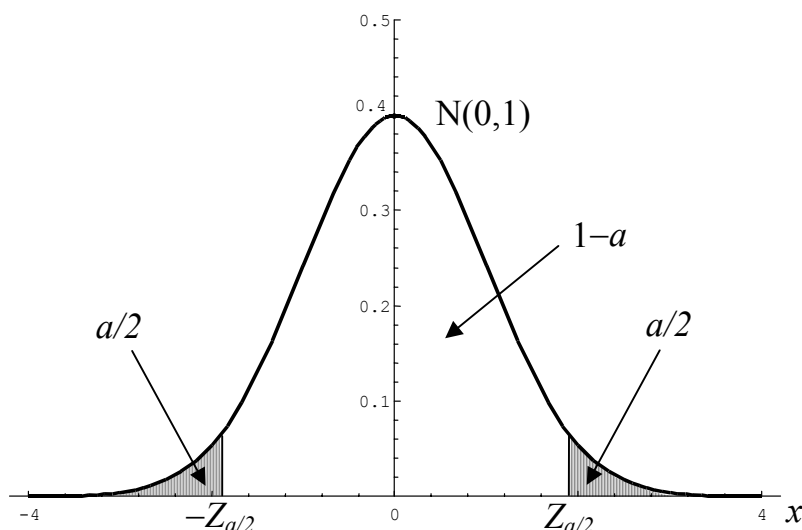
$$P(c_1 \leq Y \leq c_2) = 1-\alpha.$$

4) Εφόσον έχουν βρεθεί τα  $c_1, c_2$ , λύνουμε τη σχέση  $c_1 \leq Y = h(T, g(\theta)) \leq c_2$  ως προς  $g(\theta)$ . Έτσι, προκύπτει μία ανισότητα της μορφής

$$L = L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq g(\theta) \leq U(X_1, X_2, \dots, X_n) = U.$$

Το παραπάνω ενδεχόμενο θα έχει και αυτό πιθανότητα  $1-\alpha$  και επομένως το διάστημα  $(L, U)$  θα είναι ένα δ.ε. για το  $g(\theta)$  συντελεστού  $1-\alpha$ .

Τα  $c_1, c_2$  συνήθως επιλέγονται έτσι ώστε  $P(Y > c_2) = P(Y < c_1) = \alpha/2$ . Δηλαδή το  $c_2$  είναι το άνω  $\alpha/2$ -σημείο της κατανομής της  $Y$ , ενώ το  $c_1$  είναι το άνω  $1-\alpha/2$ -σημείο της ίδιας κατανομής.



Ας δούμε στη συνέχεια πως μπορούμε να βρούμε δ.ε. για τις παραμέτρους κανονικών πληθυσμών.

**β. Διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά κανονικής κατανομής όταν  $\mu$  γνωστό.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από  $N(\mu, \sigma^2)$  με  $\mu$  γνωστό. Ζητάμε να βρούμε ένα διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκεται

το  $\sigma^2$  με πιθανότητα  $1-\alpha$ . Θα ακολουθήσουμε τη γενική μεθοδολογία που περιγράφεται παραπάνω για την κατασκευή ενός δ.ε.

1) Εφόσον το  $\mu$  είναι γνωστό θα χρησιμοποιήσουμε την εκτιμήτρια του  $\sigma^2$ :

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

2) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$h(T, \sigma^2) = \frac{nT}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_n^2$$

ακολουθεί  $\chi^2$  κατανομή με  $n$  βαθμούς ελευθερίας η οποία δεν εξαρτάται από το  $\sigma^2$ .

3) Υπολογίζουμε τις σταθερές  $c_1, c_2$  έτσι ώστε

$$P(c_1 \leq \frac{nT}{\sigma^2} \leq c_2) = 1 - \alpha.$$

Σύμφωνα με παραπάνω παρατήρηση, επιλέγουμε τα  $c_1, c_2$  έτσι ώστε

$$P(\frac{nT}{\sigma^2} > c_2) = \alpha/2, \quad P(\frac{nT}{\sigma^2} < c_1) = \alpha/2.$$

Επομένως,

$$c_2 = \chi_n^2(\alpha/2), \quad c_1 = \chi_n^2(1 - \alpha/2)$$

όπου με  $\chi_n^2(\alpha)$  συμβολίζουμε το άνω  $\alpha$ -σημείο της κατανομής  $\chi$ -τετράγωνο με  $n$  βαθμούς ελευθερίας (τα άνω  $\alpha$ -σημεία της  $\chi_n^2$  είναι πινακοποιημένα για διάφορες τιμές των  $\alpha$  και  $n$ . Για  $n > 100$  μπορούμε προσεγγιστικά να πάρουμε ότι  $\chi_n^2(\alpha) \approx n + \sqrt{2n}Z_\alpha$ ,  $Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$ , βλ. Άσκ. 5.3).

4) Βρήκαμε λοιπόν ότι,

$$P(\chi_n^2(1 - \alpha/2) \leq \frac{nT}{\sigma^2} \leq \chi_n^2(\alpha/2)) = 1 - \alpha,$$

και λύνοντας ως προς  $\sigma^2$  θα έχουμε ότι

$$P\left(\frac{nT}{\chi_n^2(\alpha/2)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT}{\chi_n^2(1 - \alpha/2)}\right) = 1 - \alpha$$

και επομένως το

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(\alpha/2)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(1 - \alpha/2)} \right]$$

είναι ένα δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το  $\sigma^2$  όταν το  $\mu$  είναι γνωστό.

**Παράδειγμα** (συνέχεια). Ένα διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστού  $1-\alpha=95\%$  για τη διασπορά  $\sigma^2$  του βάρους των φοιτητών στο παραπάνω παράδειγμα (δεδομένου ότι το μέσο βάρος  $\mu=75$ ) θα είναι

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(0.025)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(0.975)} \right].$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  και να βρούμε από πίνακες τις τιμές των  $\chi_{20}^2(0.025), \chi_{20}^2(0.975)$ . Θα έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = (73-75)^2 + (81-75)^2 + (84-75)^2 + \dots + (71-75)^2 = 601$$

και  $\chi_{20}^2(0.025)=34.17, \chi_{20}^2(0.975)=9.59$ . Άρα

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(0.025)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(0.975)} \right] = \left[ \frac{601}{34.17}, \frac{601}{9.59} \right] = [17.59, 62.67].$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι, σύμφωνα με το τυχαίο δείγμα που πήραμε και δεδομένου ότι  $\mu=75$ , η διασπορά του βάρους των φοιτητών βρίσκεται μεταξύ του 17.59 και 62.67 με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%. Μπορούμε ισοδύναμα να πούμε ότι η τυπική απόκλιση του βάρους των φοιτητών θα είναι μεταξύ του 4.19 και του 7.91 με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

**γ. Διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά κανονικής κατανομής όταν  $\mu$  άγνωστο.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από  $N(\mu, \sigma^2)$  με  $\mu$  άγνωστο. Ζητάμε να βρούμε ένα διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκεται το  $\sigma^2$  με πιθανότητα  $1-\alpha$ . Ακολουθώντας τα ίδια ακριβώς βήματα με την προηγούμενη παράγραφο (εύρεση δ.ε. για το  $\sigma^2$  με  $\mu$  γνωστό) και χρησιμοποιώντας τη σ.σ.  $S^2$  αντί της σ.σ.  $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ , προκύπτει ότι το

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1}^2(a/2)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1}^2(1-a/2)} \right]$$

είναι ένα δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το  $\sigma^2$  όταν το  $\mu$  είναι άγνωστο.

**Παράδειγμα** (συνέχεια). Χρησιμοποιώντας και πάλι το παράδειγμα με το βάρος των φοιτητών, θα έχουμε ότι ένα δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha=95\%$  για τη διασπορά  $\sigma^2$  του βάρους των φοιτητών θα είναι

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1}^2(0.025)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1}^2(0.975)} \right].$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  και να βρούμε από πίνακες τις τιμές των  $\chi_{19}^2(0.025), \chi_{19}^2(0.975)$ . Θα έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = (73-74.55)^2 + (81-74.55)^2 + \dots + (71-74.55)^2 = 596.95$$

και  $\chi_{19}^2(0.025)=32.85, \chi_{19}^2(0.975)=8.91$ . Άρα

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{19}^2(0.025)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{19}^2(0.975)} \right] = \left[ \frac{596.95}{32.85}, \frac{596.95}{8.91} \right] = [18.17, 70.00].$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι, σύμφωνα με το τυχαίο δείγμα που πήραμε, η διασπορά του βάρους των φοιτητών βρίσκεται μεταξύ του 18.17 και 70 με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%. Μπορούμε ισοδύναμα να πούμε ότι η τυπική απόκλιση του βάρους των φοιτητών θα είναι μεταξύ του  $\sqrt{18.17}=4.26$  και του  $\sqrt{70}=8.36$  με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

**δ. Διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο  $\mu$  κανονικής κατανομής όταν  $\sigma^2$  άγνωστο.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από  $N(\mu, \sigma^2)$  με  $\sigma^2$  άγνωστο. Ζητάμε να βρούμε ένα διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκεται το  $\mu$  με πιθανότητα  $1-\alpha$ . Θα ακολουθήσουμε τη γενική μεθοδολογία που περιγράφεται παραπάνω για τη κατασκευή ενός δ.ε.

1) Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την εκτιμήτρια  $\bar{X}$  του  $\mu$ .

2) Θα πρέπει να βρούμε μία συνάρτηση των  $\bar{X}$  και  $\mu$  έστω  $h(\bar{X}, \mu)$  της οποίας η κατανομή να μην εξαρτάται από το  $\mu$ . Αν όμως χρησιμοποιήσουμε την

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}},$$

που στην ουσία χρησιμοποιήσαμε στην παράγραφο (α) (δ.ε. για  $\mu$  όταν  $\sigma^2$  γνωστό) θα φτάσουμε σε ένα δ.ε. του οποίου τα άκρα εξαρτώνται από το  $\sigma^2$ . Κάτι τέτοιο όμως δεν θα ήταν αποδεκτό αφού στη συγκεκριμένη περίπτωση θεωρούμε ότι το  $\sigma^2$  είναι άγνωστο και άρα δεν θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα άκρα του δ.ε. Αντί λοιπόν του  $\sigma^2$  στον παραπάνω τύπο θα χρησιμοποιήσουμε μία εκτιμήτριά του και συγκεκριμένα το  $S^2$ . Έτσι λοιπόν θεωρούμε τη συνάρτηση

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}}.$$

Θα πρέπει όμως πριν προχωρήσουμε να προσδιορίσουμε την κατανομή της παραπάνω τ.μ. Αυτή γράφεται ισοδύναμα και ως εξής:

$$T = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2}}.$$

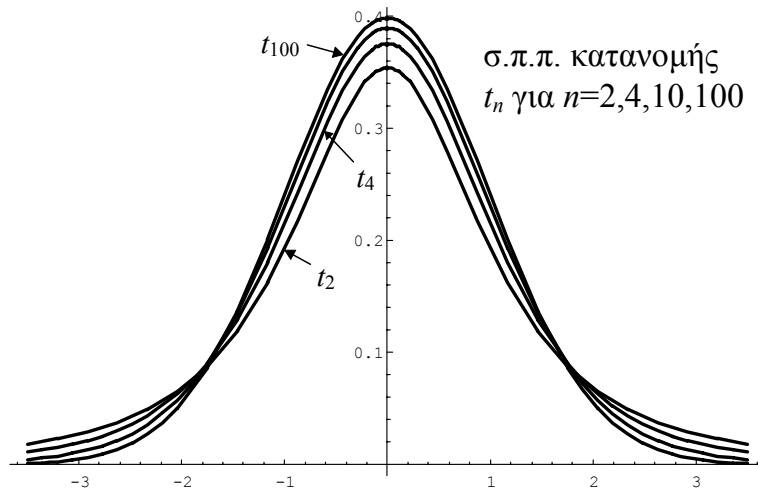
Αποδεικνύεται ότι ο δειγματικός μέσος  $\bar{X}$  και η δειγματική διασπορά  $S^2$  ενός κανονικού δείγματος είναι ανεξάρτητες τ.μ. και επομένως και οι τ.μ. που εμφανίζονται στο πηλίκο

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2$$

είναι ανεξάρτητες ως συναρτήσεις ανεξάρτητων τ.μ. Η πρώτη τ.μ. μπορεί πολύ εύκολα ναδειχθεί ότι ακολουθεί κατανομή  $N(0,1)$ . Επίσης, η δεύτερη τ.μ., σύμφωνα με παραπάνω πρόταση, ακολουθεί κατανομή  $\chi_{n-1}^2$ . Επομένως εδώ έχουμε μία νέα κατανομή η οποία προέρχεται είναι το πηλίκο δύο ανεξάρτητων τ.μ. που ακολουθούν γνωστές κατανομές: μιας  $N(0,1)$  δια τη ρίζα μιας  $\chi_{n-1}^2$  προς τους βαθμούς ελευθερίας της. Η νέα αυτή κατανομή έχει μελετηθεί και πινακοποιηθεί για διάφορες τιμές του  $n$ . Καλείται κατανομή του Student ή κατανομή  $t$  και συμβολίζεται με  $t_{n-1}$  (κατανομή  $t$  με  $n-1$  βαθμούς ελευθερίας). Δηλαδή σχηματικά:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}} \equiv t_{n-1}.$$

Η σ.π.π. της νέας αυτής κατανομής δίνεται παρακάτω για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $n$ :



Παρατηρούμε ότι η κατανομή αυτή είναι συμμετρική (αντίθετα από την  $\chi_n^2$  για μικρές τιμές του  $n$ ) και μοιάζει αρκετά με την  $N(0,1)$ . Αποδεικνύεται μάλιστα ότι για μεγάλες τιμές του  $n$  ( $n > 30$ ) η  $t_n$  συμπίπτει με την  $N(0,1)$  (βλ. Άσκηση 5.3. παρακάτω).

Άρα, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το  $\sigma^2$ , έχουμε τελικά ότι

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1},$$

ενώ η κατανομή αυτή δεν εξαρτάται από το  $\mu$ . Προχωράμε λοιπόν στο επόμενο βήμα για την κατασκευή δ.ε. για το  $\mu$ .

3) Υπολογίζουμε τις σταθερές  $c_1, c_2$  έτσι ώστε

$$P(c_1 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \leq c_2) = 1 - a$$

ή, σύμφωνα με παραπάνω παρατήρηση, έτσι ώστε

$$P(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} > c_2) = a/2, \quad P(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} < c_1) = a/2,$$

από βρίσκουμε ότι

$$c_2 = t_{n-1}(a/2), \quad c_1 = t_{n-1}(1 - a/2) = -t_{n-1}(a/2) \quad (\text{λόγω συμμετρικότητας της } t \text{ κατανομής}),$$

όπου με  $t_n(a)$  συμβολίζουμε το άνω  $\alpha$ -σημείο της κατανομής  $t_n$  με  $n$  βαθμούς ελευθερίας (τα άνω  $\alpha$ -σημεία της κατανομής  $t_n$  είναι πινακοποιημένα για διάφορες τιμές των  $\alpha$  και  $n$ . Για  $n > 30$  μπορούμε προσεγγιστικά να πάρουμε ότι  $t_n(a) \approx Z_a$ ).

4) Βρήκαμε λοιπόν ότι,

$$P(-t_{n-1}(a/2) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \leq t_{n-1}(a/2)) = 1 - a,$$

και λύνοντας ως προς  $\mu$  θα έχουμε ότι

$$P(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2)) = 1 - a$$

και επομένως το

$$[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2)]$$

είναι ένα δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το  $\mu$  όταν το  $\sigma^2$  είναι άγνωστο. Σημειώνεται ότι αν το δείγμα είναι αρκετά μεγάλο (π.χ.  $n>30$ ) τότε  $t_n(a) \approx Z_a$  και το παραπάνω διάστημα είναι σχεδόν ίσο με το

$$[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{a/2}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{a/2}].$$

Αξίζει και εδώ να παρατηρήσουμε ότι το παραπάνω δ.ε. εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που τα  $X_i$  προέρχονται από οποιονδήποτε πληθυσμό (όχι απαραίτητα κανονικό), υπό την προϋπόθεση ότι το  $n$  είναι σχετικά μεγάλο (από το Κ.Ο.Θ., βλ. και Ασκ. 5.7).

**Παράδειγμα** (συνέχεια). Αναφερόμενοι για άλλη μια φορά στο παράδειγμα με το βάρος των φοιτητών, προκύπτει ότι ένα δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha=95\%$  για το μέσο βάρος  $\mu$  θα είναι

$$[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{20}} t_{19}(0.025), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{20}} t_{19}(0.025)].$$

Σημειώνεται ότι τώρα δεν είναι απαραίτητη η ακριβής γνώση της τιμής του  $\sigma^2$ . Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το άθροισμα  $S^2$  και να βρούμε από πίνακες την τιμή του  $t_{19}(0.025)$ . Θα έχουμε ότι

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{19} ((73-74.55)^2 + (81-74.55)^2 + \dots + (71-74.55)^2) = 31.42$$

(ή εναλλακτικά,  $S^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2) = \frac{1}{19} ((73^2 + \dots + 71^2) - 20 \cdot 74.55^2) = 31.42$ ) και  $t_{19}(0.025) = 2.093$ . Άρα το παραπάνω δ.ε. θα είναι της μορφής

$$[74.55 - \frac{\sqrt{31.42}}{\sqrt{20}} 2.093, 74.55 + \frac{\sqrt{31.42}}{\sqrt{20}} 2.093] = [71.92, 77.17].$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι, σύμφωνα με το τυχαίο δείγμα που πήραμε, το μέσο βάρος των φοιτητών της σχολής βρίσκεται μεταξύ του 71.92 και του 77.17 με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

**Άσκηση 5.1.** Θέλοντας να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή  $\mu$  του λίτρου της βενζίνης στα πρατήρια των Αθηνών επισκεφτήκαμε τυχαία  $n=10$  βενζινάδικα από όπου καταγράψαμε τις τιμές (σε δρχ):

280.3, 282.8, 278.5, 283.1, 290.0, 284.9, 284.4, 279.8, 291.1, 286.7 .

α) Να δώσετε ένα δ.ε. συντελεστού 95% για τη μέση τιμή  $\mu$  του λίτρου της βενζίνης στα πρατήρια του λεκανοπεδίου. Ποίο θα ήταν το αντίστοιχο δ.ε. αν ήταν γνωστό ότι  $\sigma=4$ ;

β) Να δώσετε δ.ε. συντελεστού 95% για τη διασπορά και την τυπική απόκλιση της τιμής στο λεκανοπέδιο. Ποίο θα ήταν το αντίστοιχο δ.ε. αν ήταν γνωστό ότι  $\mu=280$ ;

(Υποθέστε ότι οι τιμές της βενζίνης στα διάφορα πρατήρια ακολουθούν κανονική κατανομή).

**Λύση.** Από τις παραπάνω 10 παρατηρήσεις βρίσκουμε ότι

$$\bar{X} = \frac{1}{10} (280.3 + 282.8 + 278.5 + 283.1 + 290.0 + 284.9 + 284.4 + 279.8 + 291.1 + 286.7) = 284.16$$

και

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{9} ((280.3-284.16)^2 + (282.8-284.16)^2 + \dots + (286.7-284.16)^2) = 17.5827 .$$

(ή εναλλακτικά,  $S^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2) = \frac{1}{9}((280.3^2 + \dots + 286^2) - 10 \cdot 284.16^2) = 17.5827$ ).

α) Το δείγμα είναι σχετικά μικρό και για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή  $t$ . Ένα δ.ε. συντελεστού 95% για το  $\mu$  όταν το  $\sigma$  είναι άγνωστο θα είναι

$$[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2)] = [284.16 - \frac{\sqrt{17.58}}{\sqrt{10}} 2.262, 284.16 + \frac{\sqrt{17.58}}{\sqrt{10}} 2.262] \\ = [281.16, 287.16].$$

όπου  $1-\alpha=95\%$  και  $t_9(0.025) = 2.262$ .

Στην περίπτωση που είναι γνωστό ότι  $\sigma=4$ , θα έχουμε το δ.ε. 95% για το  $\mu$ :

$$[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a/2}] = [284.16 - \frac{4}{\sqrt{10}} 1.96, 284.16 + \frac{4}{\sqrt{10}} 1.96] = [281.68, 286.64].$$

β) Ένα δ.ε. για το  $\sigma^2$  όταν  $\mu$  άγνωστο είναι

$$[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1}^2(a/2)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1}^2(1-a/2)}] = [\frac{(n-1)S^2}{\chi_9^2(0.025)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_9^2(0.975)}] = [\frac{9 \cdot 17.5827}{19.02}, \frac{9 \cdot 17.5827}{2.70}] = [8.32, 58.609].$$

Επίσης, ένα δ.ε. για το  $\sigma$  θα είναι το

$$[\sqrt{8.32}, \sqrt{58.609}] = [2.88, 7.65].$$

Στην περίπτωση που είναι γνωστό ότι  $\mu=280$ , θα έχουμε το δ.ε. 95% για το  $\sigma^2$ :

$$[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(a/2)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(1-a/2)}].$$

Υπολογίζουμε ότι

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = ((280.3 - 280)^2 + (282.8 - 280)^2 + \dots + (286.7 - 280)^2) = 331.3$$

(ή εναλλακτικά,  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = (n-1)S^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 = 9 \cdot 17.58 + 10 \cdot (284.16 - 280)^2 = 331.3$ )

και επειδή  $\chi_{10}^2(0.025)=20.48$ ,  $\chi_{10}^2(0.975)=3.25$  θα έχουμε τελικά τα δ.ε. 95% για το  $\sigma^2$  και για το  $\sigma$  αντίστοιχα:

$$[\frac{331.3}{20.48}, \frac{331.3}{3.25}] = [16.17, 101.93] \text{ και } [\sqrt{16.17}, \sqrt{101.93}] = [4.02, 10.09].$$

**Άσκηση 5.2.** Έστω ότι επιθυμούμε να εκτιμήσουμε το μέσο χρόνο που κάνει ένα τρένο του Μετρό για να μεταβεί από το σταθμό Α στο σταθμό Β. Χρονομετρώντας τη διαδρομή αυτή 10 φορές σημειώνουμε τους χρόνους (σε seconds)

$$357, 337, 351, 357, 350, 352, 360, 353, 377, 372.$$

α) Να δοθεί ένα δ.ε. συντελεστού 99% για το μέσο χρόνο μετάβασης. β) Να δοθεί ένα δ.ε. συντελεστού 99% για την τυπική απόκλιση του χρόνου μετάβασης. (Υποθέστε ότι οι χρόνοι είναι κανονικοί).

**Λύση.** Από τις παραπάνω 10 παρατηρήσεις βρίσκουμε ότι

$$\bar{X} = \frac{1}{10}(357 + 337 + 351 + 357 + 350 + 352 + 360 + 353 + 377 + 372) = 356.6$$

και

$$S^2 = \frac{1}{9} ((357-356.6)^2 + (337-356.6)^2 + \dots + (372-356.6)^2) = 128.711.$$

α) Το δείγμα είναι σχετικά μικρό και για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή  $t$ . Ένα δ.ε. συντελεστού 99% για το  $\mu$  θα είναι

$$\begin{aligned} [\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2)] &= [356.6 - \frac{\sqrt{128.711}}{\sqrt{10}} 3.250, 356.6 + \frac{\sqrt{128.711}}{\sqrt{10}} 3.250] \\ &= [344.9, 368.2] = [5\text{min } 45\text{sec}, 6\text{min } 8\text{sec}]. \end{aligned}$$

όπου  $1-\alpha=99\%$  και  $t_9(0.005)=3.250$ .

β) Ένα δ.ε. για το  $\sigma^2$  όταν  $\mu$  άγνωστο είναι

$$[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1}^2(a/2)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1}^2(1-a/2)}] = [\frac{(n-1)S^2}{\chi_9^2(0.005)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_9^2(0.995)}] = [\frac{9 \cdot 128.711}{23.59}, \frac{9 \cdot 128.711}{1.73}] = [49.10, 669.59].$$

Επομένως ένα δ.ε. για το  $\sigma$  συντελεστού 99% θα είναι το  $[\sqrt{49.10}, \sqrt{669.59}] = [7, 25.87]$ .

**Άσκηση 5.3.** Αποδείξτε ότι  $\chi_n^2(a) \approx n + \sqrt{2n}Z_a$  για μεγάλες τιμές του  $n$ .

**Λύση.** Γνωρίζουμε ότι αν οι τ.μ.  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  ακολουθούν τυπική  $N(0,1)$  κανονική κατανομή τότε η τ.μ.

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i^2 \sim \chi_n^2$$

ακολουθεί κατανομή χι-τετράγωνο με  $n$  βαθμούς ελευθερίας (από ορισμό). Θέτοντας  $X_i = Y_i^2$ , γνωρίζουμε από το Κ.Ο.Θ. ότι για μεγάλα  $n$  ισχύει

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nE(X_i)}{\sqrt{nV(X_i)}} \sim N(0,1).$$

Επειδή, οι τ.μ.  $X_i = Y_i^2$  ακολουθούν  $\chi_1^2$  κατανομή (βλ. παραπάνω πρόταση) και η μέση τιμή και διασπορά μιας  $\chi_k^2$  είναι  $k$  και  $2k$  αντίστοιχα, θα έχουμε ότι, για μεγάλα  $n$ ,

$$Z = \frac{Y - n}{\sqrt{2n}} \sim N(0,1).$$

Άρα ασυμπτωτικά ισχύει ότι  $\chi_n^2 \approx N(n, 2n)$ . Το γεγονός αυτό μπορεί να επαληθευτεί και από το γράφημα της σ.π.π. της κατανομής  $\chi_n^2$  που παρουσιάζεται στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο γράφημα αυτό παρατηρούμε ότι για  $n > 30$  η σ.π.π. της  $\chi_n^2$  συμπίπτει με την σ.π.π μιας κανονικής κατανομής. Το άνω α-σημείο  $\chi_n^2(a)$  ορίζεται, σύμφωνα με τα παραπάνω, ώστε:

$$P(Y > \chi_n^2(a)) = a.$$

Για μεγάλο  $n$  η παραπάνω ισοδυναμεί με

$$P(Y > \chi_n^2(a)) = a \Leftrightarrow P\left(\frac{Y - n}{\sqrt{2n}} > \frac{\chi_n^2(a) - n}{\sqrt{2n}}\right) = a \Leftrightarrow P(Z > \frac{\chi_n^2(a) - n}{\sqrt{2n}}) = a$$

$$\Rightarrow \frac{\chi_n^2(a) - n}{\sqrt{2n}} \approx Z_a \Leftrightarrow \chi_n^2(a) \approx n + \sqrt{2n}Z_a.$$

**Άσκηση 5.4.** Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέσο χρόνο ζωής των αρρένων κατοίκων μιας συγκεκριμένης περιοχής. Για το σκοπό αυτό ελήφθη τ.δ. μεγέθους  $n=200$  ανδρών. Βρέθηκε ότι,

$$\sum_{i=1}^{200} X_i = 13959.6, \quad \sum_{i=1}^{200} X_i^2 = 977265.$$

Υποθέτοντας ότι οι χρόνοι ζωής είναι κανονικοί, α) Να βρείτε ένα δ.ε. συντελεστού 95% για το μέσο χρόνο ζωής και β) Να βρείτε ένα δ.ε. συντελεστού 95% για την τυπική απόκλιση του χρόνου ζωής των ανδρών της περιοχής.

**Λύση.** Πριν προχωρήσουμε θα πρέπει να υπολογίσουμε τις εκτιμήτριες  $\bar{X}$  και  $S^2$ . Για το δειγματικό μέσο θα ισχύει ότι

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} X_i = \frac{1}{200} 13959.6 = 69.798,$$

ενώ για τη δειγματική διασπορά θα έχουμε

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^2 + \bar{X}^2 - 2X_i\bar{X}) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \bar{X}^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 + n\bar{X}^2 - 2n\bar{X}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) = \frac{1}{199} (977265 - 200 \cdot 69.798^2) = 14.63. \end{aligned}$$

α) Σύμφωνα με τα παραπάνω, ένα δ.ε. συντελεστού 95% για το  $\mu$  θα είναι

$$\left[ \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2) \right] = \left[ 69.798 - \frac{\sqrt{14.63}}{\sqrt{200}} t_{199}(0.025), 69.798 + \frac{\sqrt{14.63}}{\sqrt{200}} t_{199}(0.025) \right].$$

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο ( $>30$ ), προκύπτει ότι  $t_{199}(0.025) = Z_{0.025} = 1.96$  και άρα τελικά το παραπάνω δ.ε. συντελεστού 95% για το μέσο χρόνο ζωής θα είναι:

$$\left[ 69.798 - \frac{\sqrt{14.63}}{\sqrt{200}} 1.96, 69.798 + \frac{\sqrt{14.63}}{\sqrt{200}} 1.96 \right] = [69.27, 70.33].$$

β) Ένα δ.ε. για το  $\sigma^2$  όταν  $\mu$  άγνωστο είναι

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1}^2(a/2)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1}^2(1-a/2)} \right].$$

Επειδή το μέγεθος  $n$  του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο ( $n > 100$ ), είναι γνωστό ότι  $\chi_n^2(a) \approx n + \sqrt{2n}Z_a$ , και επομένως ένα δ.ε. για το  $\sigma^2$  όταν το  $n$  είναι μεγάλο θα είναι το

$$\left[ \frac{(n-1)S^2}{(n-1) + \sqrt{2(n-1)}Z_{a/2}}, \frac{(n-1)S^2}{(n-1) + \sqrt{2(n-1)}Z_{1-a/2}} \right] = \left[ \frac{S^2}{1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}Z_{a/2}}, \frac{S^2}{1 - \sqrt{\frac{2}{n-1}}Z_{a/2}} \right]$$

(χρησιμοποιήσαμε και ότι  $Z_{1-a} = -Z_a$ ) και αντικαθιστώντας θα έχουμε τελικά το δ.ε.

$$\left[ \frac{14.63}{1 + \sqrt{\frac{2}{199}} 1.96}, \frac{14.63}{1 - \sqrt{\frac{2}{199}} 1.96} \right] = [12.22, 18.20].$$

Τέλος, ένα δ.ε. για το  $\sigma$  συντελεστού 95% θα είναι το

$$[\sqrt{12.22}, \sqrt{18.20}] = [3.49, 4.26].$$

**Άσκηση 5.5.** Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το μέσο  $\mu$  κανονικής κατανομής. α) Να βρείτε το ελάχιστο μέγεθος του δείγματος  $n$  που πρέπει να πάρουμε ώστε το δ.ε. να έχει πλάτος το πολύ  $c$  (το  $\sigma$  είναι γνωστό). Να γίνει εφαρμογή για  $1-\alpha = 99\%$ ,  $\sigma=1$ ,  $c=0.1$ . β) Να βρείτε το ελάχιστο  $n$  ώστε το δ.ε. να έχει πλάτος το πολύ  $\sigma$ . ( $1-\alpha=99\%$ ). γ) Αν στο (α) το  $\sigma$  είναι άγνωστο, εκτιμήστε το μέγεθος  $n$  του δείγματος που πρέπει να πάρουμε χρησιμοποιώντας ένα αρχικό βοηθητικό δείγμα μεγέθους  $n_1$  (υποθ. ότι  $n$ : μεγάλο)

**Λύση.** α) Το δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το μέσο  $\mu$  όταν στο  $\sigma$  είναι γνωστό είναι της μορφής

$$\left[ \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \right].$$

Ζητάμε το μέγεθος  $n$  του δείγματος που πρέπει να πάρουμε ώστε το εύρος του παραπάνω διαστήματος είναι το πολύ  $c$ , δηλαδή,

$$2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \leq c$$

και επομένως, θα πρέπει

$$n \geq 4 \frac{\sigma^2}{c^2} Z_{\alpha/2}^2.$$

Αντικαθιστώντας, όπου  $1-\alpha=99\%$ ,  $\sigma=1$  και  $c=0.1$  θα πρέπει

$$n \geq 4 \frac{1^2}{0.1^2} Z_{0.005}^2 = \frac{4}{0.01} 2.58^2 = 2662.56.$$

Άρα τελικά  $n=2663$ .

β) Λαμβάνοντας  $c=\sigma$  στο πρώτο ερώτημα θα έχουμε άμεσα ότι

$$n \geq 4 \frac{\sigma^2}{\sigma^2} Z_{\alpha/2}^2 = 4 Z_{\alpha/2}^2.$$

Άρα, για  $1-\alpha=99\%$  θα έχουμε ότι  $n \geq 4 \cdot 2.58^2 = 26.62$  και άρα  $n = 27$ .

γ) Από το (α) είδαμε ότι το μέγεθος του δείγματος που πρέπει να πάρουμε ώστε το δ.ε. να έχει πλάτος  $c$  είναι

$$n_0 = 4 \frac{\sigma^2}{c^2} Z_{\alpha/2}^2.$$

Ζητείται η εκτίμηση της παραπάνω ποσότητας η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μία παραμετρική συνάρτηση  $g(\sigma^2)$  του (άγνωστου)  $\sigma^2$ . Θα χρησιμοποιήσουμε αντί του  $\sigma^2$ , την ε.μ.π. του  $\sigma^2$ . Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε, σύμφωνα με υπόδειξη της εκφώνησης, ένα αρχικό βοηθητικό δείγμα μεγέθους  $n_1$ . Γνωρίζουμε ότι η ε.μ.π. της διασποράς  $\sigma^2$  κανονικού δείγματος μεγέθους  $n_1$  είναι η

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n_1 - 1}{n_1} S^2 \approx S^2$$

και από την Πρόταση 4.8. (αναλλοίωτου της ε.μ.π.) θα έχουμε ότι η ε.μ.π. του  $n_0 = g(\sigma^2)$  είναι

$$\hat{n}_0 = g(\hat{\sigma}^2) = g(\hat{\sigma}^2) = 4 \frac{\hat{\sigma}^2}{c^2} Z_{a/2}^2 = \frac{4Z_{a/2}^2}{c^2} \frac{n_1 - 1}{n_1} S^2 \approx \frac{4Z_{a/2}^2}{c^2} S^2.$$

Αξίζει εδώ να επισημάνουμε ότι σε ανάλογες περιπτώσεις όπου είναι αναγκαστική η εκλογή ενός αρχικού δείγματος μεγέθους  $n_1$ , λαμβάνουμε το  $n_1$  σχετικά μικρό ώστε το τελικό  $n_0$  να είναι μεγαλύτερο του αρχικού  $n_1$ . Συνήθως, αφού εκτιμήσουμε το  $n_0$ , παίρνουμε ακόμη δείγμα μεγέθους  $\hat{n}_0 - n_1$  και χρησιμοποιώντας και το αρχικό δείγμα μεγέθους  $n_1$ , σχηματίζουμε το τελικό δείγμα μεγέθους  $n_0$ .

**Άσκηση 5.6.** Μία εταιρία συσκευασίας ενός προϊόντος (π.χ. ζάχαρης ή chips) επιθυμεί να εκτιμήσει το μέσο βάρος της συσκευασίας ενός ορισμένου τύπου (π.χ. συσκευασία που αναγράφει ότι περιέχει 100γρ) η οποία εξέρχεται από την παραγωγική διαδικασία. Για να μπορέσει η εταιρία αξιόπιστα να κρίνει αν η παραγωγή γίνεται ορθά, επιθυμεί να εκτιμήσει το μέσο βάρος έχοντας ακρίβεια δέκατου του γραμμαρίου με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%. Λαμβάνοντας ένα αρχικό (βοηθητικό) δείγμα μεγέθους  $n_1=100$  (και βρίσκοντας  $S_1=2.12$ ) να βρεθεί μία σημειακή εκτίμηση και ένα δ.ε. 90% για το τελικό μέγεθος  $n$  του δείγματος που πρέπει να ληφθεί (υποθ. ότι τα βάρη κατανέμονται κανονικά).

**Λύση.** Από την Άσκηση 5.5 γνωρίζουμε ότι το μέγεθος του δείγματος που πρέπει να πάρουμε είναι

$$n = 4 \frac{\sigma^2}{c^2} Z_{a/2}^2,$$

όπου εδώ το εύρος  $c = 0.1$  και  $\alpha = 0.05$ . Η διασπορά  $\sigma^2$  του βάρους στις συσκευασίες είναι άγνωστη. Οπότε, σύμφωνα και με υπόδειξη της εκφώνησης, λαμβάνουμε αρχικό δείγμα μεγέθους  $n_1$  από όπου βρίσκουμε δειγματική διασπορά  $S_1=2.12$ . Μία σημειακή εκτίμηση για το  $n$  (σύμφωνα και με την Άσκηση 5.5) θα είναι

$$\hat{n} \approx 4 \frac{S_1^2}{c^2} Z_{a/2}^2 = 4 \frac{2.12^2}{0.1^2} 1.96^2 = 6906.$$

Οπότε πρέπει να πάρουμε ακόμη δείγμα περίπου  $\hat{n} - n_1 = 6906 - 100 \approx 6800$  συσκευασιών.

Γνωρίζουμε ότι ένα δ.ε. συντελεστού  $1 - \alpha' = 90\%$  για το  $\sigma^2$  βάσει του αρχικού δείγματος μεγέθους  $n_1$  είναι

$$\left[ \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\chi_{n_1-1}^2(a'/2)}, \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\chi_{n_1-1}^2(1 - a'/2)} \right] \equiv [L, U],$$

Αναζητούμε ένα δ.ε. συντελεστού  $1 - \alpha'$  για το

$$n = 4 \frac{\sigma^2}{c^2} Z_{a/2}^2.$$

Επειδή  $P(L \leq \sigma^2 \leq U) = 1 - \alpha'$  θα έχουμε ότι

$$P\left(4 \frac{L}{c^2} Z_{a/2}^2 \leq 4 \frac{\sigma^2}{c^2} Z_{a/2}^2 \leq 4 \frac{U}{c^2} Z_{a/2}^2\right) = 1 - \alpha'$$

και επομένως ένα δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha=90\%$  ( $\alpha=0.1$ ) για το  $n$  θα είναι

$$\begin{aligned} [4 \frac{L}{c^2} Z_{a/2}^2, 4 \frac{U}{c^2} Z_{a/2}^2] &= [\frac{4Z_{a/2}^2}{c^2} \frac{(n_1-1)S_1^2}{\chi_{n_1-1}^2(a'/2)}, \frac{4Z_{a/2}^2}{c^2} \frac{(n_1-1)S_1^2}{\chi_{n_1-1}^2(1-a'/2)}] \\ &= [\hat{n} \frac{(n_1-1)}{\chi_{n_1-1}^2(a'/2)}, \hat{n} \frac{(n_1-1)}{\chi_{n_1-1}^2(1-a'/2)}] = [6906 \frac{99}{124.34}, 6906 \frac{99}{77.93}] = [5498, 8773]. \end{aligned}$$

Άρα τελικά για να έχουμε μία εκτίμηση του μέσου βάρους κάθε συσκευασίας ακρίβειας δέκατου του γραμμαρίου με συντελεστή εμπιστοσύνης 95% θα πρέπει, σύμφωνα με το βοηθητικό δείγμα που ελήφθη, να εκλέξουμε τελικό δείγμα μεγέθους περίπου 6906 συσκευασιών. Επιπλέον, μπορούμε να πούμε ότι το τελικό μέγεθος του δείγματος δεν μπορεί να είναι μικρότερο από 5498 η μεγαλύτερο του 8773 με συντελεστή εμπιστοσύνης 90%.

**Άσκηση 5.7.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τ.δ. από μία άγνωστη κατανομή με μέσο  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$ . Δεδομένου ότι το μέγεθος  $n$  του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο, να κατασκευάσετε προσεγγιστικό δ.ε. για το  $\mu$  συντελεστού  $1-\alpha$ .

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι εδώ το τ.δ. δεν είναι απαραίτητα κανονικό και για αυτό δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας το γνωστό δ.ε. για το μέσο κανονικής κατανομής όταν το  $\sigma^2$  είναι γνωστό. Μπορούμε όμως μέσω του Κ.Ο.Θ. να χρησιμοποιήσουμε κανονική προσέγγιση και να φτάσουμε σε παρόμοιο δ.ε. Πράγματι, από το Κ.Ο.Θ. θα ισχύει ότι

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

και επομένως,

$$P(-Z_{a/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq Z_{a/2}) \approx 1 - \alpha.$$

Άρα ένα προσεγγιστικό δ.ε. συντ.  $1-\alpha$  για το  $\mu$  όταν το  $\sigma^2$  είναι γνωστό θα είναι και πάλι το

$$[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a/2}].$$

Τέλος, στην περίπτωση που το  $\sigma^2$  είναι άγνωστο, υποθέτοντας ότι  $S^2 \approx \sigma^2$  (η  $S^2$  είναι συνεπής εκτιμήτρια του  $\sigma^2$  και άρα  $S^2 \rightarrow \sigma^2$  για  $n \rightarrow \infty$ ) προκύπτει το (προσεγγιστικό) δ.ε. για το  $\mu$  συντελεστού  $1-\alpha$ ,

$$[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{a/2}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{a/2}].$$

### ε. διάστημα εμπιστοσύνης για ποσοστό $p$ .

Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε δ.ε. για το ποσοστό  $p$  ενός πληθυσμού που έχει κάποιο χαρακτηριστικό. Αν πάρουμε ένα τ.δ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από αυτόν τον πληθυσμό και θέσουμε  $X_i=1$  αν το  $i$ -άτομο του δείγματος έχει το προς εξέταση χαρακτηριστικό και  $X_i=0$  διαφορετικά τότε, ως γνωστό, οι παρατηρήσεις  $X_i$  θα ακολουθούν διωνυμική κατανομή  $B(n=1, p)$ . Ειδικότερα,

$$P(X_i=1)=p, P(X_i=0)=1-p \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad P(X_i=x)=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1.$$

Γνωρίζουμε ότι το δειγματικό ποσοστό ή δειγματικός μέσος  $\bar{X}$  αποτελεί μία συνεπή εκτιμήτρια του  $p$  (αποδεικνύεται ότι είναι και αμερόληπτη εκτιμήτρια ελαχίστης διασποράς). Επίσης, από το Κ.Ο.Θ. συμπεραίνουμε ότι για μεγάλο  $n$  ( $>30$ ),

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nE(X_i)}{\sqrt{nV(X_i)}} = \frac{\bar{X} - E(X_i)}{\sqrt{V(X_i)/n}} = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1).$$

Άρα έχουμε βρει μία σ.σ., συγκεκριμένα την  $\bar{X}$ , της οποίας η κατανομή εξαρτάται από το  $p$ , και επίσης έχουμε βρει μία συνάρτηση αυτής  $h(\bar{X}, p) = (\bar{X} - p)/\sqrt{p(1-p)/n}$  της οποίας η κατανομή δεν εξαρτάται από το  $p$ . Σύμφωνα με τη γενική μέθοδο κατασκευής δ.ε. αρκεί στο επόμενο βήμα να βρούμε σταθερές  $c_1, c_2$  τέτοιες ώστε

$$P(-c_a \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq c_a) = 1 - \alpha,$$

Είναι εύκολο να δούμε, όπως και στην περίπτωση (α) ότι, για μεγάλο  $n$ ,

$$P(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

και αν λύσουμε ως προς  $p$  την παραπάνω διπλή ανισότητα προκύπτει ένα δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το  $p$  της μορφής,

$$\left[ \frac{\bar{X} - \frac{Z_{\alpha/2}^2}{2n}}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}^2}{n}} - \frac{Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{Z_{\alpha/2}^2}{4n^2} + \bar{X}(1-\bar{X})/n}}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}^2}{n}}, \frac{\bar{X} - \frac{Z_{\alpha/2}^2}{2n}}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}^2}{n}} + \frac{Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{Z_{\alpha/2}^2}{4n^2} + \bar{X}(1-\bar{X})/n}}{1 + \frac{Z_{\alpha/2}^2}{n}} \right]$$

το οποίο, επειδή έχουμε εξ αρχής υποθέσει ότι το  $n$  είναι μεγάλο και άρα  $Z_{\alpha/2}^2/n \approx 0$ , θα είναι σχεδόν ίσο με το

$$\left[ \bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2} \right].$$

Εξάλλου, το παραπάνω δ.ε. προκύπτει και αν θεωρήσουμε ότι για μεγάλο  $n$  ισχύει ότι

$$\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \approx \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

και άρα από την παραπάνω αρχική ανισότητα

$$-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq Z_{\alpha/2}$$

θα παίρναμε ότι

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2} \approx \bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} Z_{\alpha/2} \leq p \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} Z_{\alpha/2} \approx \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2}.$$

Η παραπάνω παραδοχή γίνεται πάντα αποδεκτή στην πράξη για αρκετά μεγάλα δείγματα ( $n \geq 100$ ) ενώ για μέτρια δείγματα ( $30 < n < 100$ ) μπορούμε αν θέλουμε να ακολουθήσουμε μία πιο συντηρητική διαδικασία και να πάρουμε δ.ε. με επίπεδο σημαντικότητας  $1-\alpha$  αντί συντελεστού  $1-\alpha$  (δηλαδή η πιθανότητα το  $p$  να ανήκει στο δ.ε. να είναι τουλάχιστον  $1-\alpha$  αντί να είναι ίση με  $1-\alpha$ ). Αυτό γίνεται εύκολα λαμβάνοντας ως δ.ε. το μεγαλύτερο διάστημα,

$$\left[ \bar{X} - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{4n}}, \bar{X} + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{4n}} \right].$$

Πράγματι, το παραπάνω δ.ε. περιέχει πάντα το

$$\left[ \bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} Z_{\alpha/2} \right],$$

διότι αποδεικνύεται εύκολα ότι  $p(1-p) \leq 1/4$  για  $p \in [0,1]$ .

Άρα τελικά ως δ.ε. για το  $p$  συντελεστού  $1-\alpha$  έχοντας δείγμα  $n > 30$  θα θεωρούμε το

$$[\bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2}],$$

εκτός από την περίπτωση κατά την οποία  $30 < n < 100$  και δεν μας πειράζει να πάρουμε ένα πιο «μεγάλο» δ.ε. προκειμένου να διασφαλίσουμε ότι αυτό θα έχει συντελεστή εμπιστοσύνης σίγουρα μεγαλύτερο του  $1-\alpha$  (και όχι προσεγγιστικά ίσο με  $1-\alpha$  όπως το παραπάνω). Σε αυτή τη δεύτερη περίπτωση ως δ.ε. για το  $p$  σε επίπεδο σημαντικότητας  $1-\alpha$  θα θεωρούμε το

$$[\bar{X} - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{4n}}, \bar{X} + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{4n}}].$$

**Άσκηση 5.8.** Έστω ότι ένα μεγάλο κόμμα θέλει να εκτιμήσει το ποσοστό  $p$  των ψηφοφόρων μιας μεγάλης πόλης που προτίθενται να το ψηφίσουν στις επερχόμενες βουλευτικές εκλογές. Το αντίστοιχο ποσοστό σε ένα τυχαίο δείγμα  $n=500$  ψηφοφόρων βρέθηκε ίσο με 40%. α) Μεταξύ ποίων ορίων βρίσκεται το πραγματικό ποσοστό  $p$  με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%; β) Αν η πόλη έχει  $m = 1000000$  ψηφοφόρους να δώσετε δ.ε. 95% για τον αριθμό των ψήφων που θα λάβει το κόμμα. γ) Πόσο περίπου παραπάνω δείγμα πρέπει να πάρουμε για να έχουμε δ.ε. 95% εύρους 2%.

**Λύση.** α) Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , οι απαντήσεις των  $n=500$  ψηφοφόρων του τ.δ. ώστε  $X_i=1$  αν ο  $i$ -ψηφοφόρος προτίθεται να ψηφίσει το συγκεκριμένο κόμμα και  $X_i=0$  διαφορετικά. Προφανώς, το τ.δ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  προέρχεται από  $B(1, p)$  κατανομή ( $P(X_i=1)=p$ ,  $P(X_i=0)=1-p$ ). Ζητάμε δ.ε. συντελεστού 95% για το  $p$ . Το δ.ε. σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι:

$$[\bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2}] = [0.4 - \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{500}} 1.96, 0.4 + \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{500}} 1.96] = [0.357, 0.443].$$

Άρα το πραγματικό ποσοστό  $p$  βρίσκεται μεταξύ του 35.7% και του 44.3% με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

β) Ο αριθμός των ψήφων του κόμματος θα είναι  $m \cdot p$  και επομένως ζητάμε δ.ε. 95% για το  $m \cdot p$ . Γνωρίζουμε ότι

$$P(L \leq p \leq U) = 1 - \alpha, \text{ όπου } L = \bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2}, \quad U = \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2}$$

και επομένως  $P(mL \leq mp \leq mU) = 1 - \alpha$ . Άρα ένα δ.ε. 95% για τον αριθμό των ψήφων του κόμματος θα είναι το

$$m \cdot [L, U] = 1000000 \cdot [0.357, 0.443] = [357000, 443000].$$

γ) Το εύρος του διαστήματος στο (α) είναι ίσο με  $44.3\% - 35.7\% = 8.6\%$ . Έστω ότι για να γίνει ίσο με 2% πρέπει να πάρουμε δείγμα μεγέθους  $n_1$ . Έστω επίσης  $\bar{X}'$  το αντίστοιχο δειγματικό ποσοστό από το δείγμα αυτό. Θα πρέπει να ισχύει ότι

$$2 \sqrt{\frac{\bar{X}'(1-\bar{X}')}{n_1}} Z_{\alpha/2} \approx 0.02$$

ή ισοδύναμα

$$n_1 \approx 4 \frac{\bar{X}'(1-\bar{X}')}{0.02^2} Z_{\alpha/2}^2,$$

και αν υποθέσουμε ότι θα βρούμε και πάλι  $\bar{X}'$  περίπου ίσο με 40% θα έχουμε τελικά ότι

$$n_1 \approx 4 \frac{0.4(1-0.4)}{0.02^2} 1.96^2 = 9220.$$

Άρα θα πρέπει να πάρουμε παραπάνω δείγμα περίπου  $9220 - 500 = 8720$  ψηφοφόρων.

**Άσκηση 5.9.** Ένα ποσοστό της παραγωγής ηλεκτρικών λαμπτήρων ενός εργοστασίου είναι ελαττωματικό. Για την εκτίμηση του άγνωστου αυτού ποσοστού λαμβάνεται δείγμα από 100 λυχνίες από τις οποίες οι 12 βρέθηκαν ελαττωματικές. α) Να βρεθεί δ.ε. εντός του οποίου με συντελεστή εμπιστοσύνης 95% θα περιέχεται το πραγματικό ποσοστό ελαττωματικών του πληθυσμού. β) Πόσο περίπου δείγμα πρέπει να πάρουμε ώστε να έχουμε δ.ε. 99% εύρους 3%;

**Λύση.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , το τ.δ. μεγέθους  $n=100$  λαμπτήρων ώστε  $X_i=1$  αν ο  $i$ -λαμπτήρας είναι ελαττωματικός και  $X_i=0$  διαφορετικά. Το τ.δ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  προέρχεται από  $B(1, p)$  κατανομή ( $P(X_i=1)=p$ ,  $P(X_i=0)=1-p$ ). Σύμφωνα με την εκφώνηση βρέθηκε ότι

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{100} 12 = 0.12.$$

Το δ.ε. συντελεστού 95% για το  $p$  θα είναι:

$$\begin{aligned} & \left[ \bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2} \right] \\ &= \left[ 0.12 - \sqrt{\frac{0.12 \cdot 0.88}{100}} 1.96, 0.12 + \sqrt{\frac{0.12 \cdot 0.88}{100}} 1.96 \right] = [0.056, 0.1837], \end{aligned}$$

δηλαδή το ποσοστό ελαττωματικών λαμπτήρων της παραγωγής βρίσκεται μεταξύ του 5.6% και του 18.4% με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

γ) Έστω ότι για να πάρουμε δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  και εύρους 3% πρέπει να πάρουμε δείγμα μεγέθους  $n_1$ . Έστω επίσης  $\bar{X}'$  το αντίστοιχο δειγματικό ποσοστό από το δείγμα αυτό. Θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\left( \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2} \right) - \left( \bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} Z_{\alpha/2} \right) = 2 \sqrt{\frac{\bar{X}'(1-\bar{X}')}{n_1}} Z_{\alpha/2} \approx 0.03$$

ή ισοδύναμα

$$n_1 \approx 4 \frac{\bar{X}'(1-\bar{X}')}{0.03^2} Z_{\alpha/2}^2,$$

και υποθέτοντας ότι θα βρούμε και πάλι  $\bar{X}'$  περίπου ίσο με 0.12 θα έχουμε τελικά ότι ( $\alpha=1\%$ )

$$n_1 \approx 4 \frac{0.12(1-0.12)}{0.03^2} 2.58^2 = 3124.$$

Άρα θα πρέπει να πάρουμε δείγμα περίπου 3124 λυχνιών.

**Άσκηση 5.10.** Σε μία έρευνα απασχολήσεως επιθυμούμε να προσδιορίσουμε το ποσοστό των ανέργων  $p$  κατά τρόπο ώστε η εκτίμησή μας να αποκλίνει του πραγματικού ποσοστού λιγότερο του 10% αυτού με πιθανότητα 95%. (Στην τελευταία απογραφή είχε βρεθεί ποσοστό ανέργων 5%). Πόσο περίπου είναι το απαιτούμενο μέγεθος δείγματος;

**Λύση.** Αν  $n$  είναι το απαιτούμενο μέγεθος του δείγματος και  $\bar{X}$  το αντίστοιχο δειγματικό ποσοστό θα πρέπει να ισχύει

$$P(|\bar{X} - p| \leq 0.1p) = 0.95.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι για μεγάλο δείγμα ισχύει ότι

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - p| \leq 0.1p) &= 0.95 \Leftrightarrow P(-0.1p \leq \bar{X} - p \leq 0.1p) = 0.95 \\ &\Leftrightarrow P\left(-\frac{0.1p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq \frac{0.1p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) = 0.95 \\ &\Leftrightarrow \frac{0.1p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = Z_{0.05/2} \\ &\Leftrightarrow n = \frac{p(1-p)}{0.1^2 p^2} Z_{0.025}^2 = \frac{1-p}{0.1^2 p} Z_{0.025}^2 \approx \frac{1-0.05}{0.1^2 \cdot 0.05} 1.96^2 = 7300. \end{aligned}$$

**στ. Διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων δύο ανεξάρτητων κανονικών πληθυσμών**

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  δύο ανεξάρτητα δείγματα από  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  και  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  αντίστοιχα. Ζητάμε δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για τη διαφορά των μέσων  $\mu_1 - \mu_2$ . Διαστήματα αυτής της μορφής χρησιμοποιούνται συνήθως για τη σύγκριση των δύο μέσων.

Θα εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση που οι διασπορές είναι γνωστές. Θα χρησιμοποιήσουμε τους δειγματικούς μέσους  $\bar{X}$  και  $\bar{Y}$  των δειγμάτων  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \text{ και } \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

και οι τ.μ.  $\bar{X}$  και  $\bar{Y}$  είναι ανεξάρτητες διότι προέρχονται από ανεξάρτητα μεταξύ τους τ.δ. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3, η τ.μ.  $\bar{X} - \bar{Y}$  θα ακολουθεί και αυτή κανονική κατανομή με μέση τιμή  $E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$  και διασπορά,

$$V(\bar{X} - \bar{Y}) = V(\bar{X} + (-\bar{Y})) = V(\bar{X}) + V(-\bar{Y}) = V(\bar{X}) + (-1)^2 V(\bar{Y}) = V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

Επομένως, από την Πρόταση 1.2.,

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

Άρα, όμοια και με τις προηγούμενες περιπτώσεις,

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

και συνεπώς, λύνοντας ως προς  $\mu_1 - \mu_2$  βρίσκουμε ότι το

$$[(\bar{X} - \bar{Y}) - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{a/2}, (\bar{X} - \bar{Y}) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{a/2}]$$

είναι δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για τη διαφορά  $\mu_1 - \mu_2$  όταν τα  $\sigma_1, \sigma_2$  είναι γνωστά.

Στην περίπτωση τώρα που τα  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  είναι άγνωστα αλλά ίσα, δηλαδή,  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  προχωράμε ακολουθώντας τα ίδια βήματα με παραπάνω και άρα

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

Επίσης, αν  $S_1^2$  και  $S_2^2$  είναι οι δειγματικές διασπορές από τα δύο δείγματα, τότε διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_1 + n_2 - 2}^2$$

(το άθροισμα ανεξάρτητων χι-τετράγωνο κατανομών με β.ε.  $a$  και  $b$  αντίστοιχα, ακολουθεί και αυτό χι-τετράγωνο κατανομή με β.ε.  $a + b$ , βλ. ιδιότητες της κατανομής Γάμμα, Κεφ. 4). Επειδή όπως έχουμε ήδη αναφέρει και παραπάνω, οι δειγματικοί μέσοι και οι δειγματικές διασπορές από κανονικά δείγματα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τ.μ., θα έχουμε τελικά ότι,

$$\frac{\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2(n_1 + n_2 - 2)}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2} \quad \left( \equiv \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_{n_1 + n_2 - 2}^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \right)$$

και όμοια και με την παράγραφο (δ) βρίσκουμε ότι

$$P(-t_{n_1 + n_2 - 2}(a/2) \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \leq t_{n_1 + n_2 - 2}(a/2)) = 1 - \alpha$$

και τελικά, λύνοντας ως προς  $\mu_1 - \mu_2$  βρίσκουμε ότι το

$$[(\bar{X} - \bar{Y}) - \sqrt{\frac{(n_1 + n_2)((n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2)}{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}} t_{n_1 + n_2 - 2}(a/2), (\bar{X} - \bar{Y}) + \sqrt{\frac{(n_1 + n_2)((n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2)}{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}} t_{n_1 + n_2 - 2}(a/2)]$$

είναι δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για τη διαφορά  $\mu_1 - \mu_2$  όταν τα  $\sigma_1, \sigma_2$  είναι άγνωστα αλλά ίσα.

Συνήθως, θα υποθέτουμε ότι οι διασπορές των προς εξέταση πληθυσμών είναι ίσες εκτός εάν υπάρχει σαφής ένδειξη για το αντίθετο.

**Άσκηση 5.11.** Έστω  $\mu_1$  και  $\mu_2$  οι μέσοι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών από δύο ταμίες μιας τράπεζας. Αν

234, 99, 234, 174, 188, 107, 173, 172

και

105, 194, 77, 33, 159, 150, 167, 127, 169, 166

είναι δειγματοληπτικά κάποιοι χρόνοι (σε sec) εξυπηρέτησης των δύο αυτών υπαλλήλων αντίστοιχα, να βρείτε δ.ε. συντελεστού 95% για τη διαφορά  $\mu_1 - \mu_2$  υποθέτοντας ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι κανονικοί  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  και  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  με  $\sigma_1 = \sigma_2 = 40$  sec. Με βάση το συγκεκριμένο δ.ε. μπορούμε να πούμε ότι οι δύο υπάλληλοι έχουν διαφορετική απόδοση;

**Λύση.** Από την παραπάνω παράγραφο έχουμε ότι το δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για τη διαφορά  $\mu_1-\mu_2$  είναι

$$[(\bar{X} - \bar{Y}) - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{\alpha/2}, (\bar{X} - \bar{Y}) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{\alpha/2}].$$

Οι αντίστοιχοι δειγματικοί μέσοι από τα δύο παραπάνω δείγματα υπολογίζονται

$$\bar{X}=172.625 \text{ και } \bar{Y}=134.7$$

και συνεπώς το παραπάνω δ.ε. θα είναι ίσο με

$$[(172.625-134.7)-40\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}1.96, (172.625-134.7)+40\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}1.96] = [0.73, 75.11].$$

Παρατηρούμε ότι η πραγματική διαφορά βρίσκεται μεταξύ του 0.73 και του 75.11 με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%. Επομένως  $\mu_1-\mu_2 > 0.73$  με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%, και άρα μπορούμε να πούμε ότι οι δύο υπάλληλοι έχουν διαφορετική απόδοση με «βεβαιότητα» ή συντελεστή εμπιστοσύνης τουλάχιστον 95%. Μάλιστα, ο πρώτος υπάλληλος φαίνεται να έχει μικρότερη απόδοση από το δεύτερο.

**Άσκηση 5.12.** Έστω  $\mu_1$  η μέση τιμή πώλησης ενός προϊόντος σε μία περιοχή Α και  $\mu_2$  η μέση τιμή πώλησης του ίδιου προϊόντος σε μία περιοχή Β. Η μέση τιμή και η διασπορά ενός τ.δ. 10 τιμών πώλησης από την περιοχή Α βρέθηκε 100.9 και 8.76667 αντίστοιχα. Επίσης, η μέση τιμή και η διασπορά ενός τ.δ. 20 τιμών πώλησης από την περιοχή Β βρέθηκε 104.45 και 12.9974 αντίστοιχα. Αν υποθέσουμε ότι οι τιμές κατανέμονται κανονικά και με ίση (αλλά άγνωστη) διασπορά και στις δύο περιοχές, να βρείτε δ.ε. συντελεστού 95% για τη διαφορά  $\mu_1-\mu_2$ . Μπορούμε με βάση το δ.ε. να πούμε ότι η μέση τιμή πώλησης στην περιοχή Α είναι διαφορετική από την αντίστοιχη στην περιοχή Β;

**Λύση.** Είναι γνωστό ότι ένα δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για τη διαφορά  $\mu_1-\mu_2$  όταν οι διασπορές των δύο πληθυσμών είναι άγνωστες αλλά ίσες είναι

$$[(\bar{X} - \bar{Y}) - \sqrt{\frac{(n_1+n_2)((n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2)}{n_1n_2(n_1+n_2-2)}} t_{n_1+n_2-2}(\alpha/2), (\bar{X} - \bar{Y}) + \sqrt{\frac{(n_1+n_2)((n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2)}{n_1n_2(n_1+n_2-2)}} t_{n_1+n_2-2}(\alpha/2)]$$

Αρκεί να βρούμε το  $t_{n_1+n_2-2}(\alpha/2) = t_{28}(0.025) = 2.048$  και άρα το δ.ε. θα είναι

$$\begin{aligned} & [(100.9-104.45) - \sqrt{\frac{(10+20)(9 \cdot 8.76 + 19 \cdot 12.99)}{10 \cdot 20(10+20-2)}} 2.048, (100.9-104.45) + \sqrt{\frac{(10+20)(9 \cdot 8.76 + 19 \cdot 12.99)}{10 \cdot 20(10+20-2)}} 2.048] \\ & = [-3.55-2.705, -3.55+2.705] = [-6.255, -0.845]. \end{aligned}$$

Μπορούμε τελικά να πούμε ότι η μέση τιμή πώλησης στην περιοχή Α είναι διαφορετική και μάλιστα χαμηλότερη από τη μέση τιμή πώλησης στην περιοχή Β με συντελεστή εμπιστοσύνης τουλάχιστον 95%.

**ζ. Διάστημα εμπιστοσύνης για το λόγο των διασπορών δύο ανεξάρτητων κανονικών πληθυσμών**

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  δύο ανεξάρτητα δείγματα από  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  και  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  αντίστοιχα. Ζητάμε δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το πηλίκο  $\sigma_2^2/\sigma_1^2$ . Διαστήματα αυτής της μορφής χρησιμοποιούνται συνήθως για τη σύγκριση των δύο διασπορών.

Θα εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση που οι μέσες τιμές  $\mu_1$  και  $\mu_2$  είναι γνωστές. Όπως είναι αναμενόμενο θα χρησιμοποιήσουμε τις εκτιμήτριες των διασπορών

$$T_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2 \text{ και } T_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2$$

αντί των δειγματικών διασπορών  $S_1^2$ ,  $S_2^2$  διότι στην περίπτωση που εξετάζουμε τα  $\mu_1$  και  $\mu_2$  είναι γνωστά. Είναι γνωστό ότι

$$\frac{n_1 T_1}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n_1}^2 \text{ και } \frac{n_2 T_2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n_2}^2$$

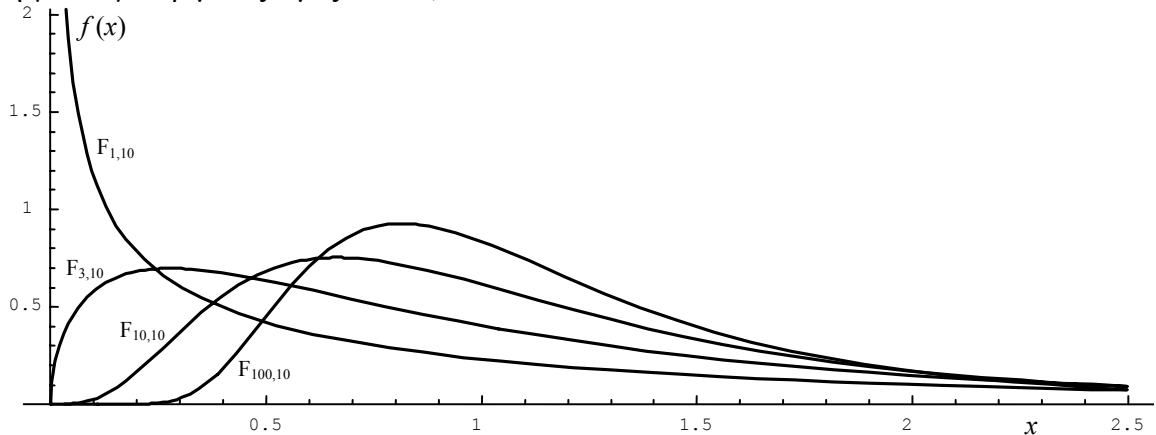
και οι τ.μ.  $T_1$  και  $T_2$  είναι ανεξάρτητες διότι προέρχονται από ανεξάρτητα μεταξύ τους τ.δ. Σχηματίζουμε τη νέα τ.μ.

$$\frac{\sigma_2^2 T_1}{\sigma_1^2 T_2} = \frac{\frac{n_1 T_1}{\sigma_1^2} / n_1}{\frac{n_2 T_2}{\sigma_2^2} / n_2},$$

η οποία γράφεται ως το πηλίκο δύο ανεξάρτητων χι-τετράγωνο κατανομών διαιρεμένων δια τους βαθμούς ελευθερίας τους. Η νέα αυτή κατανομή ονομάζεται κατανομή Snedecor ή κατανομή  $F$  με  $n_1$  και  $n_2$  β.ε. Σχηματικά:

$$\frac{\sigma_2^2 T_1}{\sigma_1^2 T_2} \sim \frac{\chi_{n_1}^2 / n_1}{\chi_{n_2}^2 / n_2} \equiv F_{n_1, n_2}.$$

Η κατανομή Snedecor έχει μελετηθεί και έχουν πινακοποιηθεί τα άνω  $\alpha$ -σημεία της  $F_{n_1, n_2}(a)$  για διάφορες τιμές του  $a$  και των β.ε.  $n_1$  και  $n_2$ . Η σ.π.π. της κατανομής αυτής έχει την ακόλουθη μορφή για συγκεκριμένες τιμές των  $n_1, n_2$ :



Αποδεικνύεται επίσης ότι  $F_{n_1, n_2}(a) = 1 / F_{n_2, n_1}(1-a)$  και  $F_{1, n}(a) = (t_n(a))^2$ . Όμοια με τις προηγούμενες παραγράφους καταλήγουμε στο ότι,

$$P(F_{n_1, n_2}(1 - \frac{a}{2}) \leq \frac{\sigma_2^2 T_1}{\sigma_1^2 T_2} \leq F_{n_1, n_2}(\frac{a}{2})) = 1 - a$$

και συνεπώς, λύνοντας ως προς  $\sigma_2^2 / \sigma_1^2$ , ένα δ.ε. συντελεστού  $1-a$  για το πηλίκο  $\sigma_2^2 / \sigma_1^2$  όταν  $\mu_1$  και  $\mu_2$  είναι γνωστά θα είναι το

$$[\frac{n_1 \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}{n_2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2} F_{n_1, n_2}(1 - \frac{a}{2}), \frac{n_1 \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}{n_2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2} F_{n_1, n_2}(\frac{a}{2})].$$

Στην περίπτωση τώρα που τα  $\mu_1, \mu_2$  είναι άγνωστα, ακολουθώντας τα ίδια βήματα με παραπάνω (χρησιμοποιώντας τις εκτιμήτριες  $S_1^2, S_2^2$  αντί των  $T_1, T_2$ ) προκύπτει ότι το

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(n_1-1)\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2}{(n_2-1)\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2} F_{n_1-1, n_2-1} \left(1 - \frac{a}{2}\right), \frac{(n_1-1)\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2}{(n_2-1)\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2} F_{n_1-1, n_2-1} \left(\frac{a}{2}\right) \right] \\ &= \left[ \frac{S_2^2}{S_1^2} F_{n_1-1, n_2-1} \left(1 - \frac{a}{2}\right), \frac{S_2^2}{S_1^2} F_{n_1-1, n_2-1} \left(\frac{a}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

είναι ένα δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το πηλίκο  $\sigma_2^2/\sigma_1^2$  όταν  $\mu_1$  και  $\mu_2$  είναι άγνωστα.

**Άσκηση 5.13.** Στην Άσκηση 5.12 που αφορούσε τις τιμές πώλησης ενός προϊόντος σε δύο περιοχές A και B υποθέσαμε ότι οι διασπορές  $\sigma_1^2$  και  $\sigma_2^2$  των τιμών στις περιοχές αυτές είναι ίσες. Βρείτε ένα δ.ε. συντελεστού 95% για το πηλίκο  $\sigma_2^2/\sigma_1^2$ . Μπορούμε να πούμε με συντελεστή εμπιστοσύνης 95% ότι οι διασπορές αυτές είναι άνισες;

**Λύση.** Γνωρίζουμε ότι το δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το πηλίκο  $\sigma_2^2/\sigma_1^2$  είναι

$$\left[ \frac{S_2^2}{S_1^2} F_{n_1-1, n_2-1} \left(1 - \frac{a}{2}\right), \frac{S_2^2}{S_1^2} F_{n_1-1, n_2-1} \left(\frac{a}{2}\right) \right].$$

Από πίνακες των άνω  $\alpha$ -σημείων της κατανομής  $F$  βρίσκουμε ότι:

$$F_{n_1-1, n_2-1} \left(\frac{a}{2}\right) = F_{9,19}(0.025) = 2.84, \quad F_{n_1-1, n_2-1} \left(1 - \frac{a}{2}\right) = F_{9,19}(0.975) = 0.273$$

και συνεπώς το δ.ε. θα είναι

$$\left[ \frac{12.997}{8.766} 0.273, \frac{12.997}{8.766} 2.84 \right] = [0.404, 4.21].$$

Το διάστημα αυτό περιέχει το 1 και άρα δεν μπορούμε να αποκλείσουμε ότι  $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = 1$  με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

#### η. Διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά αναλογιών δύο ανεξάρτητων πληθυσμών

Σε αυτή την παράγραφο θα αναζητήσουμε δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για τη διαφορά δύο ποσοστών  $p_1-p_2$  από ανεξάρτητους πληθυσμούς. Διαστήματα αυτής της μορφής χρησιμοποιούνται συνήθως για τη σύγκριση δύο ποσοστών.

Έστω λοιπόν  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από  $B(1, p_1)$  και  $B(1, p_2)$  αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι για μεγάλα  $n_1$  και  $n_2$ , (από Κ.Ο.Θ.) ισχύει για τα δειγματικά ποσοστά ότι (βλ. και παράγραφο (ε))

$$\bar{X} \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right) \text{ και } \bar{Y} \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right).$$

Τα δειγματικά ποσοστά  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  προέρχονται από ανεξάρτητα δείγματα και επομένως είναι ανεξάρτητα. Επομένως, για μεγάλα  $n_1$  και  $n_2$  ισχύει ότι

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

και άρα

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, για μεγάλα  $n_1$  και  $n_2$

$$P(-Z_{a/2} \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \leq Z_{a/2}) = 1 - \alpha$$

και επειδή για μεγάλα  $n_1$  και  $n_2$  θα ισχύει προσεγγιστικά ότι  $p_1(1-p_1)/n_1 \approx \bar{X}(1-\bar{X})/n_1$  και  $p_2(1-p_2)/n_2 \approx \bar{Y}(1-\bar{Y})/n_2$  θα έχουμε

$$P(-Z_{a/2} \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n_1} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{n_2}}} \leq Z_{a/2}) \approx 1 - \alpha.$$

Λύνοντας ως προς  $p_1 - p_2$  θα έχουμε ότι το

$$[\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n_1} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{n_2}} Z_{a/2}, \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n_1} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{n_2}} Z_{a/2}]$$

θα είναι ένα προσεγγιστικό δ.ε. (για μεγάλα  $n_1, n_2$ ) συντελεστού  $1-\alpha$  για τη διαφορά των πληθυσμιακών ποσοστών  $p_1 - p_2$ .

**Άσκηση 5.14.** Από τα 400 εξαρτήματα που παίρνουμε στην τύχη από μία μηχανή που τα κατασκευάζει, τα 16 είναι ελαττωματικά, ενώ από τα 300 μιας άλλης μηχανής, τα 24 βρέθηκαν ελαττωματικά. Να βρεθεί 99% δ.ε. για τη διαφορά των ποσοστών των ελαττωματικών εξαρτημάτων που παράγουν οι δύο μηχανές. Μπορούμε, με βάση το δ.ε., να πούμε ότι υπάρχει σημαντική διαφορά στην παραγωγή ελαττωματικών μεταξύ των δύο μηχανών;

**Λύση.** Τα δειγματικά ποσοστά των ελαττωματικών εξαρτημάτων από τις δύο αυτές μηχανές είναι σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$\bar{X} = \frac{16}{400} = 0.04 \quad \text{και} \quad \bar{Y} = \frac{24}{300} = 0.08.$$

Τα δείγματα  $n_1=400$  και  $n_2=300$  είναι αρκετά μεγάλα οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω προσεγγιστικό δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το  $p_1 - p_2$ ,

$$[\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n_1} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{n_2}} Z_{a/2}, \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n_1} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{n_2}} Z_{a/2}]$$

και αντικαθιστώντας παίρνουμε το δ.ε.

$$[0.04 - 0.08 - \sqrt{\frac{0.04(1-0.04)}{400} + \frac{0.08(1-0.08)}{300}} 2.58, 0.04 - 0.08 + \sqrt{\frac{0.04(1-0.04)}{400} + \frac{0.08(1-0.08)}{300}} 2.58] = [-0.087, 0.0076].$$

Επειδή το 0 ανήκει σε αυτό το δ.ε. δεν μπορούμε να πούμε ότι τα ποσοστά διαφέρουν με συντελεστή εμπιστοσύνης 99%.

**Άσκηση 5.15.** Βρέθηκε ότι 78 από 200 τυχαία επιλεγμένους ψηφοφόρους μιας μεγάλης πόλης Α προτίθενται να ψηφίσουν ένα συγκεκριμένο κόμμα, ενώ 240 από 500 τυχαία επιλεγμένους ψηφοφόρους μιας άλλης μεγάλης πόλης Β προτίθενται να ψηφίσουν το ίδιο κόμμα. Να βρείτε δ.ε. συντελεστού 95% για τη διαφορά  $p_1 - p_2$  των ποσοστών των ψηφοφόρων του συγκεκριμένου κόμματος στις δύο αυτές πόλεις. Μπορούμε, με βάση το δ.ε., να πούμε ότι υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο ποσοστών;

**Λύση.** Τα δειγματικά ποσοστά των ψηφοφόρων του κόμματος στις δύο αυτές πόλεις θα είναι,

$$\bar{X} = \frac{78}{200} = 0.39 \quad \text{και} \quad \bar{Y} = \frac{240}{500} = 0.48.$$

Τα δείγματα  $n_1=200$  και  $n_2=500$  είναι αρκετά μεγάλα οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω προσεγγιστικό δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για το  $p_1-p_2$ ,

$$[\bar{X}-\bar{Y}-\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n_1}+\frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{n_2}}Z_{a/2}, \bar{X}-\bar{Y}+\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n_1}+\frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{n_2}}Z_{a/2}]$$

και αντικαθιστώντας παίρνουμε άμεσα το δ.ε.

$$[0.39-0.48-\sqrt{\frac{0.39(1-0.39)}{200}+\frac{0.48(1-0.48)}{500}}1.96, 0.39-0.48+\sqrt{\frac{0.39(1-0.39)}{200}+\frac{0.48(1-0.48)}{500}}1.96]=[-0.17, -0.0094].$$

Επειδή το 0 δεν ανήκει σε αυτό το δ.ε. μπορούμε να πούμε ότι τα δύο ποσοστά διαφέρουν με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

**Άσκηση 5.16.** Μια μεγάλη εταιρία με σκοπό να βελτιώσει την απόδοση των υπαλλήλων της έδωσε κάποια συγκεκριμένα κίνητρα. Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  είναι οι αποδόσεις ενός τυχαίου δείγματος  $n$  υπαλλήλων της εταιρίας πριν και μετά την παροχή των κινήτρων ( $X_i$  απόδοση  $i$ -υπαλλήλου «πριν»,  $Y_i$  απόδοση  $i$ -υπαλλήλου «μετά»). Να δώσετε δ.ε. συντελεστού  $1-\alpha$  για τη διαφορά  $\mu_2-\mu_1$  των μέσων αποδόσεων των υπαλλήλων της εταιρίας πριν και μετά την εφαρμογή των κινήτρων (υπόθ. ότι οι αποδόσεις κατανέμονται κανονικά). Να εφαρμόσετε τα παραπάνω για  $1-\alpha=95\%$  και

$$X_i : 51, 49, 47, 43, 52, 55, 34, 49, 40, 48, 46, 51, 51, 41, 47, 53, 49, 55, 51, 51$$

$$Y_i : 53, 50, 47, 40, 55, 58, 33, 55, 42, 51, 46, 53, 53, 42, 46, 55, 50, 61, 53, 53$$

αντίστοιχα. Επήλθε αλλαγή στη μέση απόδοση των υπαλλήλων της εταιρίας;

**Λύση.** Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό δ.ε. για τη διαφορά των μέσων διότι δεν έχουμε δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους δείγματα. Συγκεκριμένα, οι τ.μ.  $X_i$  και  $Y_i$  είναι εξαρτημένες διότι αφορούν τον ίδιο υπάλληλο (π.χ. αν γνωρίζουμε ότι ο  $i$ -υπάλληλος έχει υψηλή απόδοση πριν, τότε αυξάνεται η πιθανότητα να έχει υψηλή απόδοση και μετά: οι τ.μ.  $X_i, Y_i$  έχουν θετική συσχέτιση). Παρατηρούμε όμως ότι οι νέες τ.μ.  $U_i = Y_i - X_i$ , που εκφράζουν τις διαφορές στις αποδόσεις των  $n$  υπαλλήλων του δείγματος, αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί  $N(\mu=\mu_2-\mu_1, \sigma^2)$ . Επομένως, δεδομένου ενός τ.δ.  $U_1, U_2, \dots, U_n$  από  $N(\mu=\mu_2-\mu_1, \sigma^2)$  ζητείται δ.ε. για το  $\mu=\mu_2-\mu_1$ . Από την παράγραφο (δ) θα έχουμε ότι το

$$[\bar{U}-\frac{S_U}{\sqrt{n}}t_{n-1}(a/2), \bar{U}+\frac{S_U}{\sqrt{n}}t_{n-1}(a/2)],$$

όπου  $S_U^2$  είναι η δειγματική διασπορά του τ.δ.  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , είναι ένα τέτοιο διάστημα συντελεστού  $1-\alpha$ . Εφαρμόζοντας τα παραπάνω για τις δοθείσες παρατηρήσεις θα έχουμε ότι τα  $U_i$  θα είναι

$$53-51, 50-49, 47-47, \dots, 53-51, 53-51$$

δηλαδή, τα

$$2, 1, 0, -3, 3, 3, -1, 6, 2, 3, 0, 2, 2, 1, -1, 2, 1, 6, 2, 2.$$

Επομένως,  $\bar{U}=1.65$  και  $S_U^2=4.55$ . Άρα ένα δ.ε. για τη διαφορά  $\mu_2-\mu_1$  συντελεστού 95% θα είναι το

$$[1.65-\frac{\sqrt{4.55}}{\sqrt{20}}2.093, 1.65+\frac{\sqrt{4.55}}{\sqrt{20}}2.093]=[0.65, 2.64].$$

Άρα τελικά, η μέση βελτίωση στις αποδόσεις των υπαλλήλων της εταιρίας βρίσκεται μεταξύ του 0.65 και του 2.64 με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%. Παρατηρούμε ότι το 0 δεν περιέχεται στο διάστημα αυτό και επομένως υπάρχει (θετική) διαφορά στις αποδόσεις των υπαλλήλων της εταιρίας με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.