

2. Στοιχεία Πολυδιάστατων Κατανομών

Είναι φανερό ότι έως τώρα η μελέτη μας επικεντρώνεται κάθε φορά σε πιθανότητες που αφορούν μία τυχαία μεταβλητή. Σε αρκετές όμως περιπτώσεις ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε μία πιθανότητα που αφορά συγχρόνως δύο ή περισσότερες τ.μ. που προέρχονται από το ίδιο στοχαστικό πείραμα με δ.χ. Ω. Για την καλύτερη αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων γενικεύουμε την έννοια της κατανομής μιας τ.μ. και ορίζουμε την *από κοινού συνάρτηση κατανομής δύο τ.μ. X, Y* ως εξής:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad x, y \in R$$

($P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x \text{ και } Y(\omega) \leq y\})$). Η κατανομή της τ.μ. X μπορεί να εξαχθεί από την από κοινού κατανομή των X, Y ως εξής:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} P(X \leq x, Y \leq y) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) \equiv F_{X,Y}(x, \infty), \quad x \in R$$

και αντίστοιχα $F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$, $y \in R$.

Διακριτές διδιάστατες κατανομές

Στην περίπτωση που οι τ.μ. X, Y είναι διακριτές ($X \in A, Y \in B$) τότε μπορούμε να ορίσουμε την *από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y* ως εξής:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y), \quad x \in A, y \in B.$$

Αν π.χ. $A = B = \{0, 1, 2, \dots\}$ τότε

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{i=0}^x \sum_{j=0}^y f_{X,Y}(i,j), \quad x, y \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X μπορεί να εξαχθεί από την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y από την σχέση:

$$f_X(x) = P(X = x) = P(X = x, Y \in B) = \sum_{y \in B} P(X = x, Y = y) = \sum_{y \in B} f_{X,Y}(x,y)$$

και όμοια $f_Y(y) = \sum_{x \in A} f_{X,Y}(x,y)$.

Συνεχείς διδιάστατες κατανομές

Θα λέμε ότι η από κοινού κατανομή δύο τ.μ. X, Y είναι *συνεχής* αν υπάρχει συνάρτηση $f_{X,Y}(x,y)$ έτσι ώστε

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) dv du$$

Η συνάρτηση $f_{X,Y}(x,y)$ θα καλείται *από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y*. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X προκύπτει από την από κοινού σ.π.π. ως εξής:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} F_{X,Y}(x, \infty) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v) dv du = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,v) dv$$

(ισχύει γενικά ότι $\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x g(u) du = g(x)$) και όμοια $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,y) du$.

Μέση τιμή συνάρτησης δύο ή περισσότερων τ.μ.

Αν X, Y είναι δύο τ.μ. και $Z = g(X, Y)$ τότε αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή της Z δίνεται από την σχέση

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) \quad (\text{αν } X, Y \text{ είναι διακριτές τ.μ., } X \in A, Y \in B)$$

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (\text{αν } X, Y \text{ είναι συνεχείς τ.μ.})$$

Ιδιαίτερα αν $g(X, Y) = X + Y$ τότε, για συνεχείς τ.μ. ισχύει ότι

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X + Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= E(X) + E(Y), \end{aligned}$$

και το ίδιο ισχύει και για διακριτές τ.μ. Άρα γενικότερα (χρησιμοποιώντας και την γνωστή ιδιότητα $E(aX) = aE(X)$) θα ισχύει ότι (για διακριτές και συνεχείς τ.μ.)

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y), \quad a, b \in R.$$

Από κοινού κατανομές μπορούν γενικότερα να ορισθούν για n τ.μ. Οι τεχνικές λεπτομέρειες είναι ανάλογες με αυτές που είδαμε παραπάνω για $n = 2$. Ιδιαίτερα, η παραπάνω σχέση μπορεί να γενικευτεί για n τ.μ. Συγκεκριμένα, αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι n τ.μ. τότε αποδεικνύεται ότι

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \dots + a_n E(X_n) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Παράδειγμα. 2.1. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης δύο κύβων. Αν X_1 είναι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης και X_2 το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης τότε η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X_1, X_2 θα είναι

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{1}{36}, \quad x_1 = 1, 2, \dots, 6, \quad x_2 = 1, 2, \dots, 6.$$

Αν π.χ. τώρα $Z = X_1 + X_2$ είναι το άθροισμα των δύο ρίψεων, τότε

$$E(Z) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \sum_{x=1}^6 x f_{X_1}(x) + \sum_{x=1}^6 x f_{X_2}(x) = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 x + \frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 x = 3.5 + 3.5 = 7$$

Επίσης, η από κοινού σ.π. των X_1, Z θα είναι

$$f_{X_1, Z}(x_1, z) = P(X_1 = x_1, Z = z) = P(X_1 = x_1, X_1 + X_2 = z) = P(X_1 = x_1, X_2 = z - x_1) = \frac{1}{36}$$

για $x_1 = 1, 2, \dots, 6, \quad z = x_1 + 1, \dots, x_1 + 6$ και $f_{X_1, Z}(x_1, z) = 0$ διαφορετικά.

Παράδειγμα 2.2. Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές η κάθε μία από τις οποίες είναι «επιτυχία» με πιθανότητα p και «αποτυχία» με πιθανότητα $q = 1-p$. Είναι γνωστό ότι η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με μέση τιμή np . Ας δούμε πως μπορούμε εναλλακτικά να βρούμε την μέση τιμή της X χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε την κατανομή της. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ οι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες αντιπροσωπεύουν τα αποτελέσματα των n πειραμάτων. Ειδικότερα, θα είναι $X_i=1$ ή 0 ανάλογα με το αν το i -πείραμα είναι επιτυχία ή όχι. Προφανώς θα ισχύει ότι

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

και επομένως, επειδή $E(X_i) = 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$, θα είναι

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np$$

όπως ήταν αναμενόμενο.

Άσκηση 2.1. Μία γραμματέας τοποθετεί στην τύχη n διαφορετικά γράμματα σε n φακέλους με διαφορετικές διευθύνσεις. Κάθε γράμμα ταιριάζει μόνο σε έναν φάκελο. Ποιο είναι το αναμενόμενο (μέσο) πλήθος των γραμμάτων που θα πάνε στο σωστό παραλήπτη;

Λύση. Θεωρούμε τις τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ έτσι ώστε $X_i=1$ ή 0 ανάλογα με το αν το i -γράμμα τοποθετηθεί στο σωστό φάκελο ή όχι. Το πλήθος των γραμμάτων που θα πάνε στο σωστό παραλήπτη θα είναι ίσο με

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(X_i = 1) &= P(\text{το } i\text{-γράμμα να τοποθετηθεί στο σωστό φάκελο}) \\ &= P(\text{να διαλέξει στην τύχη η γραμματέας το σωστό φάκελο για το } i\text{-γράμμα}) \end{aligned}$$

είναι ίση με $1/n$ γιατί μόνο ένας φάκελος από τους n ταιριάζει στο i -γράμμα (ο κάθε φάκελος έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής). Επομένως,

$$E(X_i) = 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$$

και άρα τελικά

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = n \frac{1}{n} = 1$$

Επομένως, όσα και αν είναι τα γράμματα, κατά μέσο όρο 1 θα τοποθετηθεί σε σωστό φάκελο.

Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Υπενθυμίζεται ότι δύο ενδεχόμενα A_1, A_2 καλούνται ανεξάρτητα αν ισχύει ότι

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

Θα λέμε ότι δύο τ.μ. είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες όταν μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχονται από ανεξάρτητα μεταξύ τους πειράματα. Αυστηρότερα, δύο τ.μ. $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ θα καλούνται (στοχαστικά) ανεξάρτητες όταν τα ενδεχόμενα $[X \in B_1]$ και $[Y \in B_2]$ είναι ανεξάρτητα για κάθε δύο υποσύνολα B_1, B_2 του $\mathbb{R}$. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2) \text{ για κάθε } B_1, B_2.$$

Αποδεικνύεται ότι αρκεί να ισχύει

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) \text{ για κάθε } x, y$$

δηλαδή, $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ για κάθε x, y . Αν οι X, Y είναι διακριτές τότε είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ για κάθε x, y . Το ίδιο ισχύει και για συνεχείς τ.μ. (αυτή τη φορά θεωρώντας συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας αντί για συναρτήσεις πιθανότητας). Παρατηρούμε ότι αν X, Y είναι ανεξάρτητες τότε

$$P(X \in B_1 | Y \in B_2) = \frac{P(X \in B_1, Y \in B_2)}{P(Y \in B_2)} = \frac{P(X \in B_1)P(Y \in B_2)}{P(Y \in B_2)} = P(X \in B_1) \text{ για κάθε } B_1, B_2$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η πιθανότητα να ισχύει $X \in B_1$ δεν αλλάζει εάν γνωρίζουμε ότι $Y \in B_2$ (και αντίστροφα). Επομένως, διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι δύο τ.μ. είναι ανεξάρτητες εάν οποιαδήποτε γνώση για την τιμή της μίας τ.μ. δεν αλλάζει την κατανομή της άλλης τ.μ. (δηλ. την πιθανότητα της άλλης να πάρει κάποια συγκεκριμένη τιμή).

Άσκηση 2.2. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης δύο κύβων. Αν X_1, X_2 είναι τα αποτελέσματα των δύο ρίψεων, να εξετάσετε αν οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες. Αν $Z = X_1 + X_2$ είναι το άθροισμα των δύο ρίψεων, είναι οι τ.μ. X_1, Z ανεξάρτητες;

Λύση. Από παραπάνω παράδειγμα γνωρίζουμε ότι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των X_1, X_2 θα είναι

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{1}{36}, \quad x_1=1,2,\dots,6, \quad x_2=1,2,\dots,6.$$

Και επειδή

$$f_{X_1}(x_1) = P(X_1 = x_1) = \frac{1}{6}, \quad x_1=1,2,\dots,6, \quad \text{και} \quad f_{X_2}(x_2) = P(X_2 = x_2) = \frac{1}{6}, \quad x_2=1,2,\dots,6,$$

επαληθεύουμε ότι $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$ για κάθε $x_1=1,2,\dots,6, \quad x_2=1,2,\dots,6$ και άρα οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες. Αντίθετα, οι τ.μ. Z, X_1 δεν είναι ανεξάρτητες διότι π.χ.

$$f_{X_1, Z}(1,2) = P(X_1 = 1, Z = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{36}$$

και

$$f_{X_1}(1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{6} \quad \text{και} \quad f_Z(2) = P(Z = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{36}$$

με συνέπεια να ισχύει ότι $f_{X_1, Z}(1,2) \neq f_{X_1}(1)f_Z(2)$.

Παραδείγματα ανεξάρτητων τ.μ.:

- το ύψος δύο φοιτητών που εκλέγονται τυχαία από την αίθουσα,
- ο χρόνος ζωής δύο διαφορετικών λαμπτήρων κ.α.
- οι τιμές ενός προϊόντος σε δύο διαφορετικά εμπορικά καταστήματα.

κ.ο.κ.

Παραδείγματα εξαρτημένων τ.μ.:

- Το ύψος X και το βάρος Y ενός τυχαία επιλεγμένου ανθρώπου.

- Αν X είναι η τιμή ενός προϊόντος μία συγκεκριμένη ημέρα και Y η τιμή του ίδιου προϊόντος (στο ίδιο κατάστημα) μία ημέρα του επόμενου μήνα τότε οι τ.μ. X, Y μπορούν να θεωρηθούν εξαρτημένες. Διότι αν π.χ. γνωρίζουμε ότι η X είναι αρκετά υψηλή, τότε συνήθως αυξάνεται και η πιθανότητα να είναι και η Y υψηλή.

- Σε ένα δοχείο έχουμε 6 αριθμημένες σφαίρες (από 1 έως 6) και εκλέγουμε στην τύχη δύο σφαίρες (χωρίς επανάθεση). Αν X, Y είναι οι αριθμοί των δύο αυτών σφαιρών τότε π.χ.

$$P(X=1|Y=1)=0 \neq P(X=1)=1/6$$

και άρα οι X, Y είναι εξαρτημένες.

κ.ο.κ

Για ανεξάρτητες τ.μ. ισχύει η επόμενη χρήσιμη πρόταση.

Πρόταση 2.1. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ., τότε, για κάθε συναρτήσεις h, g ισχύει ότι

$$E(h(X)g(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$$

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε για την περίπτωση που οι X, Y είναι συνεχείς. Θα είναι

$$\begin{aligned} E(h(X)g(Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)g(y)f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)g(y)f_X(x)f_Y(y)dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f_Y(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f_X(x)dx = E(g(Y))E(h(X)). \end{aligned}$$

Η απόδειξη για διακριτές τ.μ. είναι παρόμοια χρησιμοποιώντας αθροίσματα αντί ολοκληρώματα.

□

Η έννοια της ανεξαρτησίας μπορεί να γενικευτεί και για περισσότερες από δύο τ.μ. Συγκεκριμένα οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ θα καλούνται ανεξάρτητες αν προέρχονται από ανεξάρτητα πειράματα. Πιο αυστηρά, θα καλούνται ανεξάρτητες αν ισχύει ότι

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2) \dots P(X_n \in B_n) \text{ για κάθε } B_1, B_2, \dots, B_n.$$

Αν n τ.μ. είναι ανεξάρτητες τότε είναι και ανά δύο ανεξάρτητες (το αντίστροφο δεν ισχύει).

Συνδιακύμανση τυχαίων μεταβλητών.

Ως συνδιακύμανση (Covariance) δύο τ.μ. X, Y ορίζουμε την ποσότητα

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY - E(X)Y - XE(Y) + E(X)E(Y)) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι $\text{Cov}(X, X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$. Επίσης για $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\text{Cov}(aX, bY) = E(aXbY) - E(aX)E(bY) = ab\text{Cov}(X, Y).$$

Από την Πρόταση 2.1. προκύπτει ότι αν X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

(Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, δηλαδή αν $\text{Cov}(X, Y) = 0$ δεν έπεται πάντα ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.). Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση που οι τ.μ. X, Y παίρνουν τις 0, 1. Τότε

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = P(XY=1) - P(X=1)P(Y=1)$$

$$= P(X = 1, Y = 1) - P(X = 1)P(Y = 1).$$

Από αυτήν την σχέση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι (αν $P(Y = 1) > 0$)

$$\text{Cov}(X, Y) > 0 \Leftrightarrow P(X = 1, Y = 1) > P(X = 1)P(Y = 1) \Leftrightarrow P(X = 1 | Y = 1) > P(X = 1).$$

Δηλαδή η συνδιακύμανση αυτών των τ.μ. είναι θετική αν η πραγματοποίηση του ενδεχομένου $Y=1$ κάνει πιο πιθανή την πραγματοποίηση του ενδεχομένου $X=1$.

Γενικότερα, για οποιεσδήποτε τ.μ. X, Y , μπορεί ναδειχθεί ότι μία θετική τιμή της $\text{Cov}(X, Y)$ αποτελεί ένδειξη για το ότι οι τ.μ. X, Y παρουσιάζουν «παρόμοια συμπεριφορά». Με άλλα λόγια,

- Αν $\text{Cov}(X, Y) > 0$: Γνωρίζοντας ότι η τ.μ. Y πήρε μια «μεγάλη» τιμή τότε συνήθως αυξάνεται η πιθανότητα να πάρει και η X «μεγάλη» τιμή (και αντίστροφα). Ενώ γνωρίζοντας η τ.μ. Y πήρε μια «μικρή» τιμή τότε συνήθως αυξάνεται η πιθανότητα να πάρει και η X «μικρή» τιμή (και αντίστροφα). Όταν $\text{Cov}(X, Y) > 0$ λέμε ότι η X και η Y είναι *θετικά συσχετισμένες*.

Στην αντίθετη περίπτωση, μία αρνητική τιμή της $\text{Cov}(X, Y)$ αποτελεί ένδειξη για το ότι οι τ.μ. X, Y παρουσιάζουν «αντίθετη συμπεριφορά». Με άλλα λόγια,

- Αν $\text{Cov}(X, Y) < 0$: Γνωρίζοντας ότι η τ.μ. Y πήρε μια «μεγάλη» τιμή τότε συνήθως αυξάνεται η πιθανότητα να πάρει η X μια «μικρή» τιμή (και αντίστροφα). Ενώ γνωρίζοντας η τ.μ. Y πήρε μια «μικρή» τιμή τότε συνήθως αυξάνεται η πιθανότητα να πάρει η X μια «μεγάλη» τιμή (και αντίστροφα). Όταν $\text{Cov}(X, Y) < 0$ λέμε ότι η X και η Y είναι *αρνητικά συσχετισμένες*.

Για παράδειγμα, αν X είναι η τιμή ενός προϊόντος τον ένα μήνα και Y η τιμή του τον επόμενο μήνα τότε περιμένουμε ότι $\text{Cov}(X, Y) > 0$. Αντίθετα, αν X, Y είναι οι αριθμοί των δύο σφαιρών που επιλέγουμε χωρίς επανάθεση τότε $\text{Cov}(X, Y) < 0$. (βλ. παραδείγματα εξαρτημένων τ.μ. παραπάνω).

Μία πολύ χρήσιμη έκφραση για την διασπορά ενός αθροίσματος τ.μ. $X+Y$ μπορεί να εξαχθεί χρησιμοποιώντας τη συνδιακύμανση των X, Y . Συγκεκριμένα θα είναι:

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 = E(X^2 + Y^2 + 2XY) - (E(X)^2 + E(Y)^2 + 2E(X)E(Y)) \\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y) \\ &= V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Επομένως, αν X, Y είναι ανεξάρτητες τότε

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διακύμανση του αθροίσματος δύο θετικά συσχετισμένων τ.μ. είναι $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) > V(X) + V(Y)$, δηλαδή μεγαλύτερη από την διασπορά του αθροίσματος των X, Y στην περίπτωση που αυτές ήταν ανεξάρτητες. Αυτό συνάδει με τις παρατηρήσεις που έγιναν παραπάνω αναφορικά με την θετική εξάρτηση τ.μ. Πράγματι, αν $\text{Cov}(X, Y) > 0$ τότε οι X, Y θα έχουν «παρόμοια συμπεριφορά» και επομένως το άθροισμά τους $X+Y$ θα λαμβάνει πιο ακραίες τιμές (περισσότερο απομακρυσμένες από την $E(X+Y)$) σε σχέση με την περίπτωση που οι X, Y ήταν ανεξάρτητες (αυτό συμβαίνει διότι στην περίπτωση που $\text{Cov}(X, Y) > 0$, οι δύο τ.μ. συνήθως λαμβάνουν «μεγάλες» και «μικρές» τιμές ταυτόχρονα). Παρόμοια σχόλια μπορούν να γίνουν και για την περίπτωση αρνητικά συσχετισμένων τ.μ.

Γενικότερα, για n τ.μ. μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

ενώ $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$ αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. Υπογραμμίζεται ότι παρόμοια σχέση ισχύει και για την μέση τιμή (η μέση τιμή αθροίσματος είναι

ιση με το άθροισμα των μέσων τιμών). Για την μέση τιμή όμως το αποτέλεσμα αυτό ισχύει πάντοτε, είτε είναι εξαρτημένες οι X_i είτε όχι.

Αρκετά χρήσιμη είναι η επόμενη πρόταση που αφορά ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κανονική κατανομή.

Πρόταση 2.2. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κανονική κατανομή, τότε και η τ.μ. $X+Y$ ακολουθεί κανονική κατανομή. Γενικότερα, αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κανονική κατανομή, τότε η τ.μ. $X_1+X_2+\dots+X_n$ ακολουθεί και αυτή κανονική κατανομή.

Απομένει τώρα να βρούμε τις παραμέτρους της κανονικής τ.μ. $X+Y$ γνωρίζοντας τις παραμέτρους των X, Y . Έστω λοιπόν ότι $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, τότε

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \mu_X + \mu_Y, \quad V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

(η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες και επομένως $\text{Cov}(X, Y) = 0$). Άρα,

$$X+Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

Γενικότερα ισχύει η επόμενη πρόταση η οποία αποτελεί απλή συνέπεια των Προτάσεων 1.1 και 2.2.

Πρόταση 2.3. Αν $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ ανεξάρτητες τ.μ. και $a, b \in \mathbf{R}$ τότε

$$aX + bY \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2),$$

Γενικότερα, αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες κανονικές τ.μ. ($X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1, 2, \dots, n$) τότε

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, οι τ.μ. aX και bY ($a, b \in \mathbf{R}$) ακολουθούν και αυτές κανονική κατανομή. Συνεπώς, από την Πρόταση 2.2 η τ.μ. $Z = aX + bY$ ακολουθεί κανονική κατανομή με

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) = a\mu_X + b\mu_Y$$

Επίσης, εφόσον οι X, Y είναι ανεξάρτητες το ίδιο θα ισχύει και για τις aX, bY και επομένως,

$$V(aX + bY) = V(aX) + V(bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

από όπου προκύπτει το πρώτο αποτέλεσμα για δύο τ.μ. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το δεύτερο γενικότερο αποτέλεσμα που αφορά n τυχαίες μεταβλητές.

Άσκηση 2.3. Το μέγιστο ασφαλές βάρος που μπορεί να μεταφέρει ένας ανελκυστήρας προσωπικού είναι 2000 kgr. Αν το βάρος των ατόμων που τον χρησιμοποιούν ακολουθεί κανονική κατανομή $N(84, 49)$, (α) να βρεθεί η πιθανότητα ώστε το συνολικό βάρος 25 (τυχαία επιλεγμένων) ατόμων που χρησιμοποιούν ταυτόχρονα τον ανελκυστήρα, να είναι μικρότερο από το μέγιστο ασφαλές βάρος. (β) Να βρεθεί το πλήθος των ατόμων που επιτρέπεται να τον χρησιμοποιούν ταυτόχρονα, ώστε η πιθανότητα το συνολικό βάρος τους να είναι μικρότερο από το μέγιστο ασφαλές βάρος, να είναι τουλάχιστο 99%.

Λύση. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{25}$ το βάρος των 25 ατόμων. Από την εκφώνηση είναι γνωστό ότι $X_i \sim N(84, 49)$ ενώ οι $X_1, X_2, \dots, X_{25}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες τ.μ. Επομένως, αν

$$W = \sum_{i=1}^{25} X_i$$

είναι το συνολικό βάρος των 25 ατόμων, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3 η W ακολουθεί κανονική κατανομή με

$$E(W) = E\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \sum_{i=1}^{25} E(X_i) = 25E(X_1) = 25 \cdot 84 = 2100$$

και

$$V(W) = V\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \sum_{i=1}^{25} V(X_i) = 25V(X_1) = 25 \cdot 49 = 1225$$

Άρα $W \sim N(2100, 1225) = N(2100, 35^2)$ και συνεπώς η τ.μ.

$$Y = \frac{W - 2100}{35} \sim N(0, 1).$$

Ζητείται η πιθανότητα

$$P(W < 2000) = P\left(\frac{W - 2100}{35} < \frac{2000 - 2100}{35}\right) = \Phi\left(\frac{2000 - 2100}{35}\right) = \Phi(-2.85) = 1 - \Phi(2.85) \approx .0022.$$

(β) Έστω ότι το ζητούμενο πλήθος των ατόμων είναι ίσο με n . Θα πρέπει

$$P(\text{το συνολικό βάρος τους} < 2000 \text{ Kg}) \geq 99\% \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad P\left(\sum_{i=1}^n X_i < 2000\right) \geq 0.99.$$

Όμοια με το (α), θα ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(nE(X_i), nV(X_i)) = N(84n, 49n)$$

και συνεπώς, η τ.μ.

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - 84n}{7\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Επομένως, το n να είναι τέτοιο ώστε να ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n X_i < 2000\right) \geq 0.99 &\Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - 84n}{7\sqrt{n}} < \frac{2000 - 84n}{7\sqrt{n}}\right) \geq 0.99 \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{2000 - 84n}{7\sqrt{n}}\right) \geq \Phi(2.33) \Leftrightarrow \frac{2000 - 84n}{7\sqrt{n}} \geq 2.33 \Leftrightarrow 2000 - 84n \geq 16.31\sqrt{n} \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = \sqrt{n}$ τελικά θα πρέπει

$$2000 - 84x^2 \geq 16.31x \Leftrightarrow 84x^2 + 16.31x - 2000 \leq 0$$

και συνεπώς, το x θα πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των ριζών x_1, x_2 του παραπάνω πολυωνύμου,

$$x_1, x_2 = \frac{-16.31 \pm \sqrt{16.31^2 + 4 \cdot 84 \cdot 2000}}{2 \cdot 84} \approx \frac{-16.31 \pm 819.918}{168} = -4.97, 4.78$$

και επειδή $x > 0$ θα πρέπει να είναι $x = \sqrt{n} < 4.78$ ή ισοδύναμα $n < 22.84$. Άρα τελικά θα πρέπει $n \leq 22$.

Άσκηση 2.4. (συνέχεια του παραδείγματος 2.2) Έστω και πάλι ο αριθμός X των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές η κάθε μία από τις οποίες είναι «επιτυχία» με πιθανότητα p και «αποτυχία» με πιθανότητα $q = 1-p$. Η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με μέση τιμή np και διασπορά $np(1-p)$. Όμοια με το παράδειγμα 2.2, ας δούμε πως μπορούμε εναλλακτικά να βρούμε τη διασπορά της X χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε την κατανομή της. Έστω και πάλι οι τ.μ. X_1 ,

$X_2, \dots, X_n$ έτσι ώστε $X_i=1$ ή 0 ανάλογα με το αν το i -πείραμα είναι επιτυχία ή όχι. Προφανώς θα ισχύει ότι $X = \sum_{i=1}^n X_i$ και

$$E(X_i) = p, \quad E(X_i^2) = 0^2 \cdot P(X_i = 0) + 1^2 \cdot P(X_i = 1) = p \Rightarrow V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = p(1-p)$$

Οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αφού προέρχονται από ανεξάρτητα πειράματα. Συνεπώς,

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p)$$

όπως ήταν αναμενόμενο.

Παρατηρούμε ότι κάτι ανάλογο δεν μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της Άσκησης 2.1. Δεν μπορούμε δηλαδή εκεί άμεσα να υπολογίσουμε την διασπορά της X από τις διασπορές των X_i διότι οι X_i που απαρτίζουν το άθροισμα δεν είναι ανεξάρτητες. Σε αυτή την περίπτωση χρειάζεται να υπολογίσουμε και τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ των X_i . Αλλά ας δούμε αναλυτικότερα το πρόβλημα.

Άσκηση 2.5. Μία γραμματέας τοποθετεί στην τύχη n διαφορετικά γράμματα σε n φακέλους με διαφορετικές διευθύνσεις. Κάθε γράμμα ταιριάζει μόνο σε έναν φάκελο. Αν X εκφράζει πλήθος των γραμμάτων που θα πάνε στο σωστό παραλήπτη, ποια η διασπορά της τ.μ. X ;

Λύση. Θεωρούμε και πάλι τις τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ έτσι ώστε $X_i=1$ ή 0 ανάλογα με το αν το i -γράμμα τοποθετηθεί στο σωστό φάκελο ή όχι. Θα είναι $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Η διασπορά της τ.μ. μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \text{Cov}(X_i, X_j)$$

και επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε τα $V(X_i)$, $\text{Cov}(X_i, X_j)$. Γνωρίζουμε από την λύση της άσκησης 2.1 ότι $E(X_i)=1/n$. Επίσης,

$$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = 0^2 P(X_i = 0) + 1^2 P(X_i = 1) - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} g(x, y) f_{X,Y}(x, y)$ θα έχουμε ότι

$$E(X_i X_j) = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 xy P(X_i = x, X_j = y) = P(X_i = 1, X_j = 1) = P(X_i = 1 | X_j = 1) P(X_j = 1) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Άρα,

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n-1)n^2}$$

και τελικά,

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \text{Cov}(X_i, X_j) = n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n(n-1) \frac{1}{(n-1)n^2} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

Επομένως, όσα και αν είναι τα γράμματα, η διασπορά του πλήθους των σωστά τοποθετημένων φακέλων θα είναι 1.