

1. Η κανονική κατανομή

Η κανονική κατανομή είναι η σημαντικότερη κατανομή πιθανοτήτων με τις περισσότερες εφαρμογές. Μελετήθηκε αρχικά από τον De Moivre (1667-1754) και από τον Laplace (1749-1827) οι οποίοι απέδειξαν ότι η διωνυμική κατανομή $B(n,p)$ προσεγγίζεται, για μεγάλο n , από την κανονική κατανομή. Το 1809 ο Gauss (1777-1855) μελετώντας τη θεωρία τυχαίων σφαλμάτων παρατήρησε ότι οι κατανομές των σφαλμάτων των μετρήσεων μπορούσαν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά από μία συνεχή καμπύλη, η οποία αναφερόταν ως «κανονική καμπύλη των σφαλμάτων» και αποδίδονταν στους νόμους της τύχης.

Η χρησιμότητα της κανονικής κατανομής θα γίνει περισσότερο φανερή από το κεντρικό οριακό θεώρημα που θα αναφέρουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, κάθε φυσική ποσότητα της οποίας η τιμή μπορεί να θεωρηθεί ότι διαμορφώνεται από ένα μεγάλο αριθμό (ανεξάρτητων) παραγόντων ακολουθεί προσεγγιστικά κανονική κατανομή.

Ορισμός 1.1. Η συνεχής κατανομή με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R} (\mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0)$$

καλείται κανονική κατανομή με παραμέτρους μ, σ^2 . (συμβ. με $N(\mu, \sigma^2)$).

Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή αυτής της κατανομής είναι ίση με μ ενώ η διασπορά της ίση με σ^2 . Πράγματι, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

και θέτοντας $y = x - \mu$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, θα έχουμε ότι

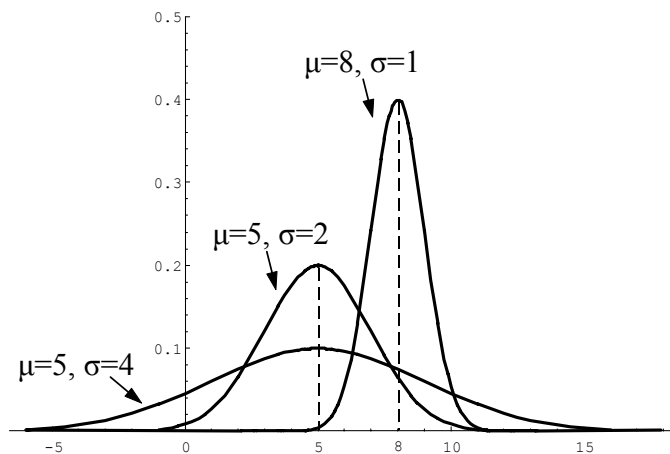
$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0 + \mu \cdot 1 = \mu.$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει διότι το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης g για την οποία ισχύει ότι $g(-y) = -g(y)$ (συμμετρική ως προς το σημείο $(0,0)$) και επομένως είναι ίσο με 0. Επίσης, το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 1 διότι η f είναι σ.π.π. Τέλος,

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &=_{y=(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \sigma^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sigma^2 \end{aligned}$$

διότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι γνωστό (π.χ. από πίνακες ολοκληρωμάτων) ότι είναι ίσο με $\sqrt{2\pi}$.

Το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $N(\mu, \sigma^2)$ δίνεται στο επόμενο σχήμα για α) $\mu = 8, \sigma = 1$, β) $\mu = 5, \sigma = 2$, γ) $\mu = 5, \sigma = 4$.



Μία σημαντική ιδιότητα της κανονικής κατανομής δίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.1. Αν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ τότε και η τ.μ. $aX + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) ακολουθεί κανονική κατανομή $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Απόδειξη. Έστω $Y = aX + b$. Αν $a > 0$ θα ισχύει ότι

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(X \leq \frac{y-b}{a}) = F_X(\frac{y-b}{a})$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{y-b}{a}\right) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{((y-b)/a - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(a\sigma)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - (a\mu + b))^2}{2(a\sigma)^2}} \end{aligned}$$

και επομένως η τ.μ. $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Ανάλογα γίνεται η απόδειξη και για $a < 0$. $\square$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε άμεσα να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. $aX + b$ ως εξής:

$$E(aX + b) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b = a\mu + b$$

και

$$V(aX + b) = a^2 V(X) = a^2 \sigma^2.$$

(Οι παραπάνω δύο σχέσεις μας δίνουν τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. $aX + b$ χωρίς να μας δίνουν κάποια άλλη πληροφορία για την κατανομή της, ενώ η Πρόταση 1.1. μας δίνει την επιπρόσθετη πληροφορία ότι η τ.μ. $aX + b$ ακολουθεί και αυτή κανονική κατανομή).

- Η τυπική κανονική κατανομή.

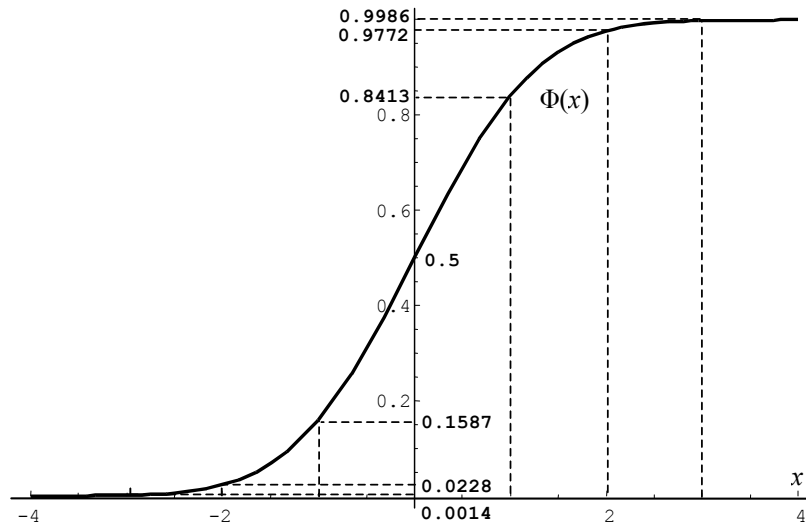
Η κανονική κατανομή $N(0,1)$ (δηλ. $\mu=0$, $\sigma=1$) θα καλείται τυπική κανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$ θα συμβολίζονται για ευκολία με $\phi(x)$ και $\Phi(x)$ αντίστοιχα. Η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad x \in \mathbf{R}$$

θα έχει τη μορφή:

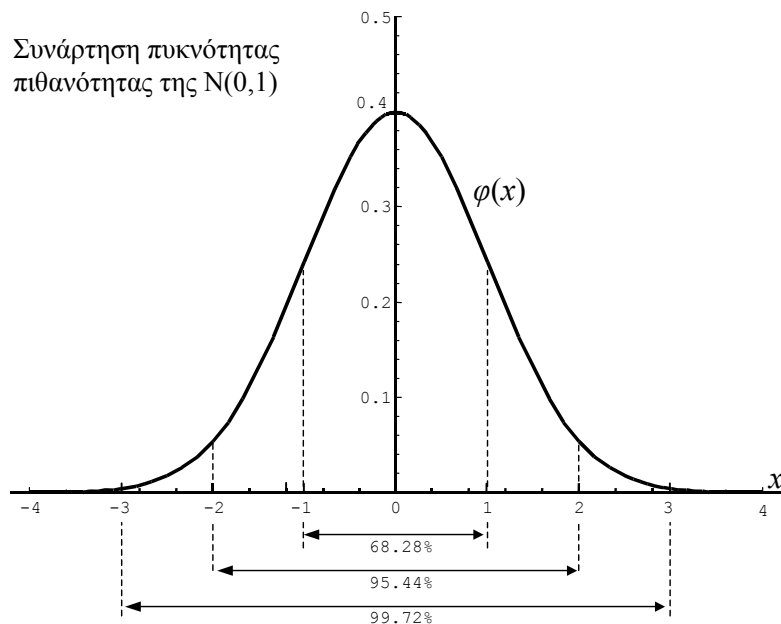


Δυστυχώς, το ολοκλήρωμα που εκφράζει την $\Phi(x)$ δεν μπορεί να γραφεί σε απλούστερη μορφή. Για το λόγο αυτό ο υπολογισμός των τιμών της Φ γίνεται χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές μεθόδους. Ενδεικτικά, έχει βρεθεί ότι:

$$\Phi(-3) \approx 0.0014, \Phi(-2) \approx 0.0228, \Phi(-1) \approx 0.1587, \Phi(0) = 0.5, \Phi(1) \approx 0.8423, \Phi(2) \approx 0.9772, \Phi(3) \approx 0.9986.$$

Συνήθως, στο τέλος κάθε συγγράμματος στατιστικής υπάρχει ένας πίνακας που περιέχει (προσεγγιστικές) τιμές της $\Phi(x)$ για διάφορες τιμές του x . Όπως θα γίνει φανερό στη συνέχεια, η χρησιμότητα αυτού του πίνακα είναι μεγάλη για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης και για τους ελέγχους στατιστικών υποθέσεων.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής θα έχει τη μορφή:



Παρατηρούμε ότι αν $X \sim N(0,1)$ τότε, π.χ.,

$$P(-3 \leq X \leq 3) = \int_{-3}^3 \varphi(x) dx = \Phi(3) - \Phi(-3) \approx 0.9972,$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = \int_{-2}^2 \varphi(x) dx = \Phi(2) - \Phi(-2) \approx 0.9544,$$

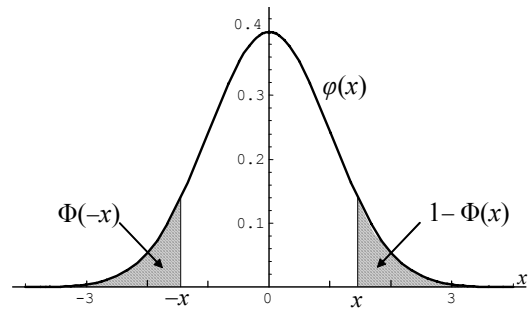
$$P(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.6828.$$

Επίσης, από το σχήμα γίνεται φανερό ότι η συνάρτηση φ πυκνότητας πιθανότητας της $N(0,1)$ είναι συμμετρική περί τον κάθετο άξονα που περνά από το 0. Επομένως το εμβαδόν κάτω από την φ (σ.π.π. της $N(0,1)$) από το $-\infty$ ως το 0 είναι ίσο με το εμβαδόν από το 0 έως το ∞ και επειδή ως γνωστό το συνολικό εμβαδόν είναι ίσο με 1 θα ισχύει ότι

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx = 0.5$$

(όπως έχει γίνει ήδη φανερό και από τις ενδεικτικές τιμές της Φ που δίνονται παραπάνω). Επίσης, λόγω της συμμετρίας θα είναι

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Η χρησιμότητα της τυπικής κανονικής κατανομής γίνεται φανερή από την ακόλουθη παρατήρηση. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 δίνεται από τον τύπο

$$F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) = \int_{-\infty}^x f_{N(\mu, \sigma^2)}(y) dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό δεν μπορεί να γραφεί σε απλούστερη μορφή. Συνεπώς, ο απευθείας υπολογισμός της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της $N(\mu, \sigma^2)$ δεν είναι δυνατός. Για το λόγο αυτό θα ήταν αρκετά χρήσιμη η κατασκευή πινάκων που να δίνουν την τιμή της $F_{N(\mu, \sigma^2)}(x)$ για όλες τις τιμές των παραμέτρων x , μ , σ^2 , όπως και στην περίπτωση της Φ που εξετάσαμε παραπάνω. Ευτυχώς, παρατηρούμε ότι αρκεί να βασιστούμε στον πίνακα τιμών της $F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x)$. Πράγματι, αν η τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε από την Πρόταση 1.1 θα ισχύει ότι

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2\right) = N(0,1)$$

και συνεπώς,

$$F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = F_{N(0,1)}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Συνοψίζοντας θα έχουμε την επόμενη πρόταση

Πρόταση 1.2. 1) Αν η τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η τ.μ.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

2) Η συνάρτηση κατανομής της $N(\mu, \sigma^2)$ εκφράζεται μέσω της συνάρτησης κατανομής Φ της τυπικής κανονικής από τη σχέση

$$F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, για την εύρεση των τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της $N(\mu, \sigma^2)$ αρκούν οι πίνακες για την $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Επειδή όμως, όπως έχει ήδη επισημανθεί, ισχύει ότι $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, αρκεί να κατασκευάσουμε πίνακες για την $\Phi(x)$, $x \geq 0$. Άρα, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε

$$P(X \leq x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), & x \geq \mu \\ 1 - \Phi\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right), & x < \mu \end{cases}$$

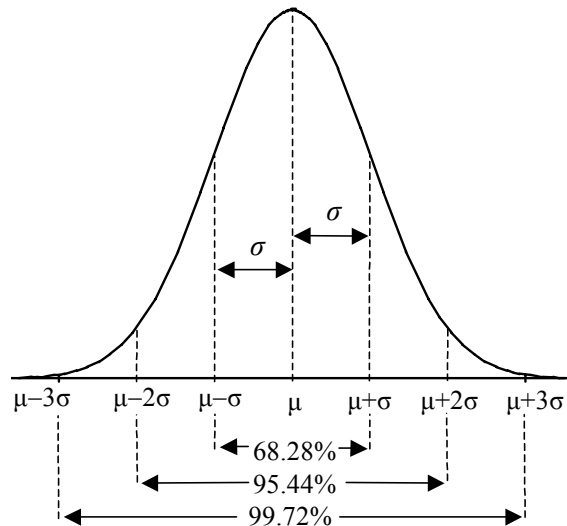
Τέλος, παρατηρούμε ότι, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P\left(-3 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 3\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) \approx 0.9972 \approx 1$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P\left(-2 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) \approx 0.9544$$

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.6828$$

Επομένως, αν μία τ.μ. X ακολουθεί $N(\mu, \sigma^2)$ τότε παίρνει τιμές μεταξύ του $\mu - 3\sigma$ και του $\mu + 3\sigma$ με πιθανότητα σχεδόν 1, τιμές μεταξύ του $\mu - 2\sigma$ και του $\mu + 2\sigma$ με πιθανότητα περίπου 95% και τιμές μεταξύ του $\mu - \sigma$ και του $\mu + \sigma$ με πιθανότητα περίπου 68%.



Άσκηση 1.1. Αν η τ.μ. $X \sim N(6, 4)$ να υπολογιστούν οι πιθανότητες

α) $P(X < 6)$, β) $P(X \geq 3)$, γ) $P(2 < X < 8)$ δ) $P(|X - 5| < 3.5)$, ε) $P(X = 3)$

Λύση. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2 η τ.μ. $Z = \frac{X-6}{2} \sim N(0, 1)$. Άρα,

$$\alpha) P(X < 6) = P\left(\frac{X-6}{2} < \frac{6-6}{2}\right) = P(Z < 0) = \Phi(0) = 0.5$$

$$\beta) P(X \geq 3) = P\left(\frac{X-6}{2} > \frac{3-6}{2}\right) = 1 - P(Z \leq -1.5) = 1 - \Phi(-1.5) = \Phi(1.5) \approx 0.9332$$

$$\begin{aligned} \gamma) P(2 < X < 8) &= P\left(\frac{2-6}{2} < \frac{X-6}{2} < \frac{8-6}{2}\right) = P(-2 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(1) - 1 + \Phi(2) \approx 0.8413 - 1 + 0.9772 = 0.8185 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta) P(|X-5|<3.5) &= P(-3.5 < X-5 < 3.5) = P(1.5 < X < 8.5) = P\left(\frac{1.5-6}{2} < \frac{X-6}{2} < \frac{8.5-6}{2}\right) \\ &= P(-2.25 < Z < 1.25) = \Phi(1.25) - \Phi(-2.25) = \Phi(1.25) - 1 + \Phi(2.25) \\ &\approx 0.8944 - 1 + 0.9878 = 0.8822\end{aligned}$$

ε) $P(X=3) = 0$ διότι η πιθανότητα σε σημείο όταν η τ.μ. είναι συνεχής είναι 0.

Άσκηση 1.2. Αν η τ.μ. $X \sim N(50, 100)$ να βρεθεί το c :

$$\text{i)} P(X \leq c) = 0.1840, \quad \text{ii)} P(50 - c \leq X \leq 50 + c) = 0.9660$$

Λύση. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2 η τ.μ. $Z = \frac{X-50}{10} \sim N(0,1)$. Συνεπώς,

$$P(X \leq c) = P\left(\frac{X-50}{10} \leq \frac{c-50}{10}\right) = P\left(Z \leq \frac{c-50}{10}\right) = \Phi\left(\frac{c-50}{10}\right).$$

Δηλαδή,

$$\Phi\left(\frac{c-50}{10}\right) = 0.1840 \text{ ή ισοδύναμα } \Phi\left(\frac{50-c}{10}\right) = 1 - 0.1840 = 0.8160$$

Από τον πίνακα της Φ βρίσκουμε ότι $\Phi(0.9) \approx 0.8160$ και επομένως (χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η Φ είναι γνήσια αύξουσα και επομένως αντιστρέψιμη)

$$\Phi\left(\frac{50-c}{10}\right) \approx \Phi(0.9) \Rightarrow \frac{50-c}{10} \approx 0.9 \Rightarrow c \approx 41.$$

$$\begin{aligned}\text{ii)} P(50-c \leq X \leq 50+c) &= P\left(\frac{50-c-50}{10} \leq \frac{X-50}{10} \leq \frac{50+c-50}{10}\right) = P\left(\frac{-c}{10} \leq Z \leq \frac{c}{10}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{c}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-c}{10}\right) = \Phi\left(\frac{c}{10}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{c}{10}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{10}\right) - 1\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$2\Phi\left(\frac{c}{10}\right) - 1 = 0.9660 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c}{10}\right) = 0.983$$

Από τον πίνακα της Φ βρίσκουμε ότι $\Phi(2.12) \approx 0.983$ και επομένως

$$\Phi\left(\frac{c}{10}\right) \approx \Phi(2.12) \Rightarrow \frac{c}{10} \approx 2.12 \Rightarrow c \approx 21.2$$

Άσκηση 1.3. Μηχανή κατασκευάζει βίδες που το μήκος τους σε cm ακολουθεί την $N(5, 0.2^2)$. Εάν το μήκος μίας βίδας είναι έξω από το διάστημα 5 ± 0.2 η βίδα θεωρείται ελαττωματική.

α) Ποια η πιθανότητα μια τυχαία επιλεγμένη βίδα να είναι ελαττωματική;

β) Ποια η πιθανότητα ανάμεσα σε 10 τυχαία επιλεγμένες βίδες, το πολύ μία να είναι ελαττωματική;

Λύση Αν X είναι η τ.μ. που εκφράζει το μήκος μιας βίδας, η τ.μ. $Z = \frac{X-5}{0.2} \sim N(0,1)$ (βλ. Πρόταση 1.2)

$$\begin{aligned}\alpha) P(X > 5+0.2 \text{ ή } X < 5-0.2) &= 1 - P(4.8 < X < 5.2) = 1 - P\left(\frac{4.8-5}{0.2} < \frac{X-5}{0.2} < \frac{5.2-5}{0.2}\right) \\ &= 1 - P(-1 < Z < 1) = 1 - (\Phi(1) - \Phi(-1)) = 1 - (\Phi(1) - 1 + \Phi(1)) \\ &= 2 - 2\Phi(1) = 0.32\end{aligned}$$

β) Είναι γνωστό ότι αν Y είναι το πλήθος των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές η κάθε μία από τις οποίες έχει πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας $1-p$, τότε η τ.μ. Y ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(n,p)$. Ειδικότερα,

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, y=0,1,\dots,n \quad (\text{αποδεικνύεται ότι } E(Y)=np, \text{Var}(Y)=np(1-p))$$

Στη συγκεκριμένη άσκηση, αν Y εκφράζει το πλήθος των ελαττωματικών βιδών στο δείγμα των 10 βιδών, τότε $Y \sim B(n=10, p=0.32)$. (εδώ θεωρούμε ως «επιτυχία» την καταγραφή ελαττωματικής βίδας). Συνεπώς ζητάμε την πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(Y \leq 1) &= P(Y=0) + P(Y=1) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10-0} + \binom{10}{1} p^1 (1-p)^{10-1} = (1-p)^{10} + 10p(1-p)^9 \\ &= (1-0.32)^{10} + 10 \cdot 0.32(1-0.32)^9 = 0.68^{10} + 3.2 \cdot 0.68^9 = 0.0211 + 0.0994 = 0.12 \end{aligned}$$

Άσκηση 1.4. Το ύψος των ανδρών ενός πληθυσμού ακολουθεί κανονική κατανομή $N(167, 3^2)$.

i) Ποια η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος άνδρας να έχει ύψος

α) μεγαλύτερο από 167cm

β) μεταξύ 164cm και 173cm

γ) μεγαλύτερο από 170cm

ii) Σε ένα τυχαίο δείγμα 4 ανδρών ποια η πιθανότητα

α) να έχουν όλοι ύψος πάνω από 170

β) δύο να έχουν ύψος πάνω από τη μέση τιμή και δύο κάτω από τη μέση τιμή;

Λύση. Αν X είναι η τ.μ. που εκφράζει το ύψος ενός άνδρα σε cm τότε, από την Πρόταση 1.2 ισχύει ότι

$$Z = \frac{X-167}{3} \sim N(0,1).$$

i) Θα είναι

$$\alpha) P(X > 167) = P\left(\frac{X-167}{3} > \frac{167-167}{3}\right) = P(Z > 0) = 1 - \Phi(0) = 0.5$$

$$\begin{aligned} \beta) P(164 < X < 173) &= P\left(\frac{164-167}{3} < \frac{X-167}{3} < \frac{173-167}{3}\right) = P(-1 < Z < 2) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1) = 0.9772 - 1 + 0.8413 = 0.8185 \end{aligned}$$

$$\gamma) P(X > 170) = P\left(\frac{X-167}{3} > \frac{170-167}{3}\right) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

ii) α) Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, θα χρησιμοποιήσουμε τη διωνυμική κατανομή. Αν θέσουμε Y την τ.μ. που εκφράζει το πλήθος των ανδρών με ύψος πάνω από 170, τότε $Y \sim B(n=4, p=0.1587)$ και συνεπώς ζητείται η πιθανότητα,

$$P(Y=4) = \binom{4}{4} p^4 (1-p)^{4-4} = \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 = p^4 = 0.1587^4 = 0.0006$$

β) Αν W δηλώνει το πλήθος των ανδρών που είναι ψηλότεροι του 167, τότε $W \sim B(n=4, p=0.5)$ και επομένως ζητείται η πιθανότητα

$$P(W=2) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^{4-2} = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 = 6 \cdot 0.5^4 = 0.375.$$