

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Ασκήσεις Στατιστικής II

1

1. Αν για ένα ενδεχόμενο A ισχύει $P(A^C) = P(A) + 0.5$, να βρείτε την πιθανότητα εμφάνισης του A .
2. Έστω A, B τα ενδεχόμενα ότι ένας συγκεκριμένος γιατρός βρίσκεται στις 10 π.μ. στο ιατρείο του ή στο σπίτι του αντίστοιχα. Αν $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.30$, ποια είναι η πιθανότητα στις 10 π.μ. να μη βρίσκεται ούτε στο ιατρείο ούτε στο σπίτι του;
3. Έστω A, B, Γ τρία ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει $\Gamma \subseteq B \subseteq A$ και $P(A) = \alpha$, $P(B) = \beta$, $P(\Gamma) = \gamma$ (με $\gamma \leq \beta \leq \alpha$).
 - i) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A-B)$, $P(A-(B-\Gamma))$, $P((A-B)-\Gamma)$ συναρτήσει των α, β, γ . Τι παρατηρείτε;
 - ii) Να γίνει εφαρμογή για $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/4$ και $\gamma = 1/5$.
4. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $P(\{i\}) = 2^{-i}$, $i = 1, 2, \dots$.
 - i) να δείξετε ότι $P(\Omega) = 1$
 - ii) να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων
 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, \dots\}$, $\Gamma = \{2, 4, 6, \dots\}$, $\Delta = \{x: x \geq 10\}$.
5. Ζητάμε από ένα φίλο μας να μας πει στην τύχη έναν αριθμό μικρότερο από 1 δισεκατομμύριο. Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός που θα μας πει να περιέχει μία τουλάχιστον φορά το ψηφίο 8;
6. Ένας δρομέας των 100m πρόκειται να τρέξει στη λωρίδα 3 ενός στίβου με 8 λωρίδες. Αν γνωρίζει ότι στον αγώνα παίρνουν μέρος εκτός από αυτόν άλλοι 3 αθλητές οι οποίοι τοποθετούνται εντελώς τυχαία στις υπόλοιπες 7 λωρίδες, ποια είναι η πιθανότητα να μην τρέχει δίπλα του (σε γειτονική λωρίδα) κανένας αντίπαλος;
7. Στο τμήμα επισκευών μιας εταιρίας ηλεκτρικών συσκευών υπάρχουν προς επισκευή 10 τηλεοράσεις και 12 βίντεο. Το προσωπικό που διαθέτει η εταιρεία επισκευάζει σε μία μέρα μόνο 6 συσκευές. Αν οι συσκευές που θα επισκευαστούν διαλέγονται τυχαία, να βρεθεί η πιθανότητα σε μία μέρα
 - i) να επισκευαστούν 3 τηλεοράσεις και 3 βίντεο
 - ii) να επισκευαστούν το πολύ 4 τηλεοράσεις.
8. Ένας πομπός στέλνει 4 σήματα, καθένα από τα οποία είναι "0" ή "1".
 - i) Πόσα είναι τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω του πειράματος;
 - ii) Αν όλα τα στοιχεία του Ω είναι ισοπίθανα, ποια είναι η πιθανότητα
 - α) να μην υπάρχουν στο σήμα καθόλου διαδοχικές εκπομπές από "0" ή "1";
 - β) να υπάρχουν στο σήμα τρία διαδοχικά "1";
9. Στην αποθήκη ενός εργοστασίου παραγωγής ελαστικών αυτοκινήτων υπάρχουν 100 λάστιχα από τα οποία τα 5 παρουσιάζουν ένα μικρό ελάττωμα. Ένα κατάστημα παραγγέλλει 15 λάστιχα. Αν αυτά διαλεχτούν τελείως τυχαία, (ανάμεσα στα 100) ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από τα ελαττωματικά λάστιχα να αποσταλεί στο κατάστημα;
10. Σε μία οικογένεια με 3 παιδιά η μητέρα έχει αγοράσει τρία δώρα για την πρωτοχρονιά. Ζητάει από τα παιδιά να γράψουν σε ένα χαρτί ποιο από τα τρία δώρα θέλει ο καθένας (χωρίς ο ένας να ξέρει τι δώρο διάλεξε ο άλλος). Ποια είναι η πιθανότητα
 - i) κανένα από τα τρία παιδιά να μη διαλέξει το ίδιο δώρο με τα άλλα δύο;
 - ii) τουλάχιστον δύο παιδιά να διαλέξουν το ίδιο δώρο;
11. Ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε
 - i) 4 ίδια αποτελέσματα
 - ii) τουλάχιστον 2 ίδια αποτελέσματα.

Μπορείτε να βρείτε τις πιθανότητες των προηγούμενων ενδεχομένων, αν ρίξουμε το ζάρι k φορές ($2 \leq k \leq 6$);

12. Μία εταιρεία διαθέτει 25 φορτηγά, από τα οποία τα 10 είναι ρυπογόνα (εκπέμπουν καυσαέρια έξω από τα φυσιολογικά όρια). Ο τεχνικός της εταιρείας διαλέγει στην τύχη 6 από τα 25 φορτηγά και τους κάνει έλεγχο καυσαερίων. Ποια είναι η πιθανότητα να εντοπίσει

- i) ακριβώς 3 ρυπογόνα φορτηγά ii) το πολύ 2 ρυπογόνα φορτηγά
- iii) τουλάχιστον 1 ρυπογόνο και 1 μη ρυπογόνο φορτηγό

13. Ρίχνουμε ένα ζάρι 3 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα

- i) να μη φέρουμε καμία φορά έξι ii) να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά έξι;

14. Μία γραμματέας τοποθετεί στην τύχη n διαφορετικά γράμματα σε n φακέλους με διαφορετικές διευθύνσεις. Ποια η πιθανότητα να πάει ένα τουλάχιστον γράμμα στο σωστό παραλήπτη; Τι συμβαίνει όταν το n είναι πολύ μεγάλο; (υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τον τύπο του Poincare για την πιθανότητα ένωσης ενδεχομένων)

Λύσεις

1. Επειδή, $P(A^C) = 1 - P(A)$ θα έχουμε ότι $1 - P(A) = P(A) + 0.5$ από όπου προκύπτει ότι $P(A) = 1/4$.

2. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $A^C \cap B^C$. Παρατηρούμε ότι $A \cap B = \emptyset$ και επομένως,

$$\begin{aligned} P(A^C \cap B^C) &= P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) \\ &= 1 - 0.45 - 0.30 = 0.25. \end{aligned}$$

3. Θα είναι

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B) = \alpha - \beta,$$

και

$$\begin{aligned} P(A - (B - \Gamma)) &= P(A) - P(A \cap (B - \Gamma)) = P(A) - P(A \cap B \cap \Gamma^C) = P(A) - P(B \cap \Gamma^C) \\ &= P(A) - P(B - \Gamma) = P(A) - P(B) + P(B \cap \Gamma) = P(A) - P(B) + P(\Gamma) = \alpha - \beta + \gamma, \end{aligned}$$

και τέλος,

$$\begin{aligned} P((A - B) - \Gamma) &= P(A - B) - P((A - B) \cap \Gamma) = P(A - B) - P(A \cap B^C \cap \Gamma) = P(A - B) - P(B^C \cap \Gamma) \\ &= P(A - B) - P(\emptyset) = P(A) - P(B) = \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $P(A - (B - \Gamma)) \neq P((A - B) - \Gamma)$.

4. i) Ισχύει ότι

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \frac{1}{1-1/2} = 1$$

ii) Θα είναι

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{7}{16},$$

$$P(B) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\{2i+1\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{2} \frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3},$$

$$P(\Gamma) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(A) = 1 - \sum_{i=1}^9 P(\{i\}) = 1 - \sum_{i=1}^9 \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(1/2)^9}{1-1/2} = (1/2)^9.$$

5. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλους τους αριθμούς από το 0 έως το 1 δισεκατομμύριο $- 1$. Με άλλα λόγια, ο Ω αποτελείται από όλους τους αριθμούς με 9 ψηφία. Κάθε ψηφίο μπορεί να είναι ένας από τους 10 αριθμούς $0, 1, 2, \dots, 9$. Άρα $|\Omega| = 10^9$. Έστω $A \subseteq \Omega$ το ενδεχόμενο επιλογής ενός αριθμού που δεν περιέχει το 8. Το A αποτελείται από όλους τους αριθμούς με 9 ψηφία μόνο που τώρα κάθε ψηφίο μπορεί να είναι ένας από τους 9 αριθμούς $0, 1, 2, \dots, 7, 9$. Άρα $|A| = 9^9$. Σύμφωνα με την εκφώνηση ζητείται η πιθανότητα A^C και επειδή ο Ω αποτελείται από ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα, θα έχουμε τελικά ότι

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{9^9}{10^9} = 1 - 0.9^9 \approx 0.612.$$

6. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλους τους συνδυασμούς των 7 ανά 3 χωρίς επανάληψη (από τις υπόλοιπες 7 λωρίδες εκλέγονται 3 για την τοποθέτηση των 3 αθλητών). Έστω A το ενδεχόμενο να μην τρέχει στη λωρίδα 2 ή 4 κανένας από τους 3 αθλητές. Το A θα αποτελείται από όλους τους συνδυασμούς των 5 ανά 3 χωρίς επανάληψη (από τις 5 λωρίδες που απομένουν εκλέγονται 3 για την τοποθέτηση των 3 αθλητών). Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα και άρα τελικά

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{2}{7}.$$

7. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από όλους τους συνδυασμούς των 22 ανά 6 χωρίς επανάληψη. Επομένως θα ισχύει ότι

$$|\Omega| = \binom{22}{6}.$$

i) Έστω το ενδεχόμενο A : να επισκευαστούν 3 τηλεοράσεις και 3 βίντεο. Θα ισχύει ότι

$$|A| = \binom{10}{3} \binom{12}{3}.$$

Επομένως, (ο Ω περιέχει ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{3} \binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} = \frac{26400}{74613} \approx 35\%.$$

ii) Έστω το ενδεχόμενο A_i : να επισκευαστούν ακριβώς i τηλεοράσεις (και $6-i$ βίντεο). Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $B = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Τα A_i είναι ξένα ανά δύο και επομένως,

$$P(B) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$$

και εργαζόμενοι όμοια με το (i) τελικά προκύπτει ότι

$$P(B) = \frac{\binom{10}{0} \binom{12}{6}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{1} \binom{12}{5}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{2} \binom{12}{4}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{3} \binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{4} \binom{12}{2}}{\binom{22}{6}}$$

$$(=1 - P(A_5) - P(A_6)).$$

8. i) Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 2 στοιχείων ανά 4 με επανάληψη. Επομένως, $|\Omega| = 2^4 = 16$.

ii) α) Έστω A το ενδεχόμενο να μην υπάρχουν στο σήμα διαδοχικές εκπομπές από "0" ή "1". Επομένως, $A = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$ και

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

β) Έστω B το ενδεχόμενο να υπάρχουν στο σήμα τρία διαδοχικά "1". Επομένως, $B = \{(1,1,1,0), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$ και

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{16}.$$

9. Έστω A το ενδεχόμενο να επιλεγεί τουλάχιστον ένα από τα ελαττωματικά λάστιχα. Θα ισχύει ότι A^C = να μην επιλεγεί κανένα από τα ελαττωματικά λάστιχα. Όμοια με την άσκηση 7, θα είναι

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{\binom{95}{15}}{\binom{100}{15}}.$$

10. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος (δυνατές επιλογές των 3 παιδιών) αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 3 (παιχνιδιών) ανά 3 με επανάληψη (είναι δυνατό δύο παιδιά να επιλέξουν το ίδιο δώρο). Επομένως, $|\Omega| = 3^3 = 27$.

i) Έστω A το ενδεχόμενο «κανένα από τα τρία παιδιά να μη διαλέξει το ίδιο δώρο με τα άλλα δύο» = «τα 3 παιδιά επιλέγουν διαφορετικά δώρα». Το A θα αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 3 (παιχνιδιών) ανά 3 χωρίς επανάληψη (επιλογή διαφορετικών δώρων). Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα και επομένως,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(3)_3}{3^3} = \frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

ii) Το ενδεχόμενο «τουλάχιστον δύο παιδιά να διαλέξουν το ίδιο δώρο» είναι συμπληρωματικό του A . Επομένως, ζητείται η πιθανότητα

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

11. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 6 στοιχείων ανά 4 με επανάληψη. Επομένως, $|\Omega| = 6^4$.

i) Αν A είναι το ενδεχόμενο εμφάνισης 4 ίδιων αποτελεσμάτων, θα είναι

$$A = \{(1,1,1,1), (2,2,2,2), \dots, (6,6,6,6)\}$$

και επειδή ο χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα θα ισχύει ότι

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1.$$

ii) Αν B το ενδεχόμενο εμφάνισης τουλάχιστον 2 ίδιων αποτελεσμάτων, θα ισχύει ότι

$$B^C = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Omega : a_i \neq a_j \text{ για } i \neq j\}$$

και άρα το B^C αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 6 στοιχείων ανά 4 χωρίς επανάληψη. Επομένως, $|B^C| = (6)_4$, και επειδή ο Ω αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα θα ισχύει ότι

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \frac{|B^C|}{|\Omega|} = 1 - \frac{(6)_4}{6^4} = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{26}{36}.$$

Τέλος, αν ρίξουμε το ζάρι k ($2 \leq k \leq 6$) φορές θα έχουμε ότι $|\Omega| = 6^k$ και

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^k} = \frac{1}{6^{k-1}}, \quad P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \frac{|B^C|}{|\Omega|} = 1 - \frac{(6)_k}{6^k}.$$

12. i) Αν A_i το ενδεχόμενο να εντοπιστούν ακριβώς i ρυπογόνα φορτηγά, τότε όμοια με την Άσκηση 7 θα είναι

$$P(A_3) = \frac{\binom{10}{3} \binom{15}{3}}{\binom{25}{6}}$$

ii) Λόγω του ότι τα ενδεχόμενα $A_0, A_1, \dots, A_6$ είναι ξένα ανά δύο θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(\text{να εντοπιστούν το πολύ 2 ρυπογόνα φορτηγά}) &= P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) \\ &= P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) = \frac{\binom{10}{0} \binom{15}{6}}{\binom{25}{6}} + \frac{\binom{10}{1} \binom{15}{5}}{\binom{25}{6}} + \frac{\binom{10}{2} \binom{15}{4}}{\binom{25}{6}} \end{aligned}$$

ii) Θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(\text{να εντοπιστούν τουλάχιστον 1 ρυπογόνο και 1 μη ρυπογόνο φορτηγό}) &= \\ &= 1 - P(\text{να εντοπιστούν 0 ρυπογόνα ή 0 μη ρυπογόνα φορτηγά}) \\ &= 1 - P(A_0 \cup A_6) = 1 - P(A_0) - P(A_6) = 1 - \frac{\binom{10}{0} \binom{15}{6}}{\binom{25}{6}} - \frac{\binom{10}{6} \binom{15}{0}}{\binom{25}{6}}. \end{aligned}$$

13. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 6 (6 δυνατά αποτελέσματα σε κάθε ρίψη) ανά 3 (3 πειράματα) με επανάληψη. Επομένως $|\Omega| = 6^3$.

i) Έστω $A \subseteq \Omega$ το ενδεχόμενο να μην φέρουμε καμία φορά 6. Το A αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 5 ανά 3 με επανάληψη και επομένως $|A| = 5^3$. Επειδή τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^3}{6^3}.$$

Εναλλακτικά, μπορούσαμε να βρούμε την παραπάνω πιθανότητα ως εξής. Σε κάθε ένα από τα τρία ανεξάρτητα μεταξύ τους πειράματα (3 ρίψεις ζαριού), η πιθανότητα μη εμφάνισης του «έξι» είναι $5/6$. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{όχι 6 στην 1}^{\text{η}} \text{ ρίψη και όχι 6 στην 2}^{\text{η}} \text{ ρίψη και όχι 6 στην 3}^{\text{η}} \text{ ρίψη}) = \\ &= P(\text{όχι 6 στην 1}^{\text{η}} \text{ ρίψη}) P(\text{όχι 6 στην 2}^{\text{η}} \text{ ρίψη}) P(\text{όχι 6 στην 3}^{\text{η}} \text{ ρίψη}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3. \end{aligned}$$

ii) Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου A^C . Άρα, $P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - (5/6)^3$.

14. Έστω A_i το ενδεχόμενο τοποθέτησης του i γράμματος στο σωστό φάκελο, $i=1,2,\dots,n$. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Από τον τύπο του Poincare θα έχουμε ότι

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Θα ισχύει ότι

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i | A_j)P(A_j) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n}, \quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n}$$

κ.ο.κ., ...

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \frac{1}{n!}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι το πρώτο άθροισμα $\sum_i$ αποτελείται από n όρους (για $i=1,2,\dots,n$), το δεύτερο άθροισμα $\sum_{i < j}$ αποτελείται από $\binom{n}{2}$ όρους ($\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$, $i \neq j$), το τρίτο άθροισμα $\sum_{i < j < k}$ αποτελείται από $\binom{n}{3}$ όρους, κ.ο.κ. ... το τελευταίο άθροισμα αποτελείται από $\binom{n}{n} = 1$ όρους. Άρα θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \binom{n}{1} \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \end{aligned}$$

Από το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης, $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i / i!$ συμπεραίνουμε ότι

$$e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$$

και άρα τελικά, αν $n \rightarrow \infty$,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} = 1 - e^{-1}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αξιοσημείωτο διότι όταν ο αριθμός n των φακέλων (και των γραμμάτων) γίνεται πολύ μεγάλος (πρακτικά $n > 10$), η πιθανότητα μιας τουλάχιστον σωστής τοποθέτησης δεν γίνεται μηδέν, όπως ίσως θα αναμέναμε, αλλά συγκλίνει σε μία σταθερά $1 - e^{-1} \approx 0.6321$. Έτσι, είτε έχουμε 10 είτε 10.000 γράμματα, η πιθανότητα μιας τουλάχιστον σωστής τοποθέτησης πρακτικά παραμένει ίδια.

Ασκήσεις Στατιστικής II

2

1. Δείξτε ότι δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B με $P(A) > 0, P(B) > 0$ δεν είναι ανεξάρτητα.
2. Αν η εμφάνιση του ενδεχομένου A κάνει την εμφάνιση του ενδεχομένου B πιο πιθανή, η εμφάνιση του B κάνει την εμφάνιση του A πιο πιθανή;
3. Το άθροισμα της ρίψης δύο ζαριών μπορεί να είναι 2,3,...,12. Μπορούμε να δώσουμε πιθανότητα $1/11$ σε καθένα από αυτά τα γεγονότα;
4. Δείξτε ότι αν $P(A) > P(B)$ τότε $P(A|B) > P(B|A)$.
5. Μία επιτροπή αποτελείται από 3 μέλη. Κάθε μέλος παίρνει σωστή απόφαση για κάποιο ζήτημα ανεξάρτητα από τους άλλους και με πιθανότητα p . Αν η τελική απόφαση λαμβάνεται κατά πλειοψηφία ποια είναι η πιθανότητα λήψης σωστής απόφασης.
6. Από ένα δοχείο που περιέχει 5 άσπρες και 3 κόκκινες σφαίρες εξάγουμε μία σφαίρα και χωρίς να επιστρέψουμε τη σφαίρα στο δοχείο, διαλέγουμε στη συνέχεια μία δεύτερη. Ποια είναι η πιθανότητα να διαλέξουμε
 - i) στην πρώτη εξαγωγή κόκκινη σφαίρα και στη δεύτερη άσπρη;

ii) άσπρες σφαίρες και στις δύο εξαγωγές;

7. Ένα εξάρτημα παρουσιάζει δύο ειδών βλάβες, τύπου α και τύπου β, οι οποίες εμφανίζονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Η πιθανότητα να εμφανιστεί η βλάβη α είναι 12%, ενώ η πιθανότητα να εμφανιστεί η βλάβη β είναι 15%. Ποια είναι η πιθανότητα

i) να εμφανιστούν και οι δύο βλάβες συγχρόνως;

ii) να εμφανιστεί μία τουλάχιστον από τις δύο βλάβες;

iii) να εμφανιστεί βλάβη τύπου β, αν είναι γνωστό ότι έχει ήδη εμφανιστεί βλάβη τύπου α;

8. Ένα στα χίλια άτομα ενός πληθυσμού πάσχει από κάποια σοβαρή ασθένεια. Η εξέταση που χρησιμοποιείται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει λάθος διάγνωση στο 1% των περιπτώσεων, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση πράγματι πάσχει από την ασθένεια, και στο 2% των περιπτώσεων, αν δεν πάσχει. i) Ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει θετική η εξέταση σε κάποιο άτομο που διαλέχτηκε τυχαία από τον πληθυσμό; ii) Αν για κάποιο άτομο του πληθυσμού η εξέταση ήταν θετική, ποια είναι η πιθανότητα να πάσχει πράγματι από την ασθένεια;

9. Αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα, να δείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τα ζευγάρια α) A^C, B β) A, B^C γ) A^C, B^C

10. Αν για τρία ανεξάρτητα ενδεχόμενα A, B, Γ ισχύει ότι

$$P(A \cap B) = 0.45, P(B \cap \Gamma) = 0.40, P(A \cap \Gamma) = 0.72, P(A \cap B \cap \Gamma) = 0.36$$

να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A), P(B), P(\Gamma)$.

11. Κατά τη ρίψη ενός μαύρου και ενός κόκκινου ζαριού ορίζουμε τα ενδεχόμενα

A : το μαύρο ζάρι έδειξε περιττό αριθμό

B : το κόκκινο ζάρι έδειξε περιττό αριθμό

Γ : το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι περιττό.

Να δείξετε ότι τα A, B, Γ είναι ανά δύο ανεξάρτητα. Είναι τα A, B, Γ ανεξάρτητα;

12. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα i) να φέρουμε 3 κεφαλές, ii) να φέρουμε 3 κεφαλές, αν είναι γνωστό ότι α) η πρώτη ένδειξη ήταν κεφαλή, β) οι δύο πρώτες ενδείξεις ήταν κεφαλές, γ) οι δύο από τις τρεις ενδείξεις ήταν κεφαλές.

13. Ένα δοχείο περιέχει 6 κόκκινες και 4 πράσινες σφαίρες, ενώ ένα δεύτερο δοχείο περιέχει 7 κόκκινες και 3 πράσινες σφαίρες. Μια σφαίρα διαλέγεται στην τύχη από το πρώτο δοχείο και τοποθετείται στο δεύτερο. Στη συνέχεια μια σφαίρα διαλέγεται στην τύχη από το δεύτερο δοχείο και τοποθετείται στο πρώτο. α) Ποια είναι η πιθανότητα να διαλεχτεί κόκκινη σφαίρα από το πρώτο δοχείο και κόκκινη από το δεύτερο; β) Ποια είναι η πιθανότητα στο τέλος του πειράματος να μην έχει αλλάξει η σύνθεση των δύο δοχείων;

14. Περίπου 14% των ανδρών και 2% των γυναικών πάσχουν από αχρωματοψία. Ποια είναι η πιθανότητα ένα άτομο που διαλέγεται στην τύχη από το ακροατήριο μιας διάλεξης να πάσχει από αχρωματοψία, αν στην αίθουσα υπάρχουν α) 40 άνδρες και 70 γυναίκες; β) ίσο πλήθος ανδρών και γυναικών; γ) διπλάσιοι άνδρες από γυναίκες;

15. Αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα μεταξύ τους και ισχύει $P(A) > 0, P(B) > 0$, τότε ποιά από τις επόμενες προτάσεις ισχύει πάντοτε

☐ τα A, B είναι ανεξάρτητα ☐ ισχύει $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ☐ τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

Λύσεις

1. Ισχύει ότι $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 < P(A)P(B)$.

2. Η εμφάνιση του ενδεχομένου A κάνει την εμφάνιση του ενδεχομένου B πιο πιθανή, δηλαδή, $P(B|A) > P(B)$. Θέλουμε να δούμε αν με βάση αυτή την ανισότητα προκύπτει επίσης ότι $P(A|B) > P(A)$. Θα έχουμε ότι

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} > \frac{P(B)P(A)}{P(B)} = P(A)$$

Άρα, πράγματι, και η εμφάνιση του B κάνει την εμφάνιση του A πιο πιθανή.

3. Τα ενδεχόμενα αυτά δεν είναι ισοπίθανα διότι π.χ.

$$\begin{aligned} P(\text{άθροισμα } 2) &= P(\text{πρώτο ζάρι } 1 \text{ και δεύτερο ζάρι } 1) \\ &= P(\text{πρώτο ζάρι } 1)P(\text{δεύτερο ζάρι } 1) = \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{36}, \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} P(\text{άθροισμα } 3) &= P(\text{πρώτο ζάρι } 1 \text{ και δεύτερο ζάρι } 2) + P(\text{πρώτο ζάρι } 2 \text{ και δεύτερο ζάρι } 1) \\ &= P(\text{πρώτο ζάρι } 1)P(\text{δεύτερο ζάρι } 2) + P(\text{πρώτο ζάρι } 2)P(\text{δεύτερο ζάρι } 1) \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{2}{36} \end{aligned}$$

κ.ο.κ. (η ρίψη δύο ζαριών μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ανεξάρτητα πειράματα το καθένα από τα οποία συνίσταται στη ρίψη ενός ζαριού).

4. Θα είναι

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A).$$

5. Έστω A_i το ενδεχόμενο λήψης σωστής απόφασης από το i -μέλος της επιτροπής. Η πιθανότητα λήψης σωστής απόφασης θα είναι $P(A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup A_1 A_3)$. Από τον τύπο του Poincare αυτή η πιθανότητα θα είναι ίση με

$$\begin{aligned} &P(A_1 A_2) + P(A_2 A_3) + P(A_1 A_3) - P(A_1 A_2 \cap A_2 A_3) - P(A_1 A_2 \cap A_1 A_3) - P(A_2 A_3 \cap A_1 A_3) \\ &\quad + P(A_1 A_2 \cap A_2 A_3 \cap A_1 A_3) \\ &= P(A_1 A_2) + P(A_2 A_3) + P(A_1 A_3) - 2P(A_1 A_2 A_3) = p^2 + p^2 + p^2 - 2p^3 = 3p^2 - 2p^3. \end{aligned}$$

6. Έστω A_i, K_i το ενδεχόμενο επιλογής άσπρης, κόκκινης σφαίρας αντίστοιχα, στην i -εξαγωγή.

$$\text{i) } P(A_2 \cap K_1) = P(A_2 | K_1)P(K_1) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{56} \quad \text{ii) } P(A_2 \cap A_1) = P(A_2 | A_1)P(A_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{20}{56}$$

7. Αν A, B είναι τα ενδεχόμενα εμφάνισης βλάβης α, β αντίστοιχα, τότε

$$\begin{aligned} \text{i) } P(A \cap B) &= P(A)P(B) = 0.12 \cdot 0.15 = 0.018 \\ \text{ii) } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.12 + 0.15 - 0.018 = 0.252 \\ \text{iii) } P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) = 0.15 \end{aligned}$$

8. Το πείραμα αποτελείται από την τυχαία επιλογή ενός ατόμου από τον πληθυσμό και την εξέτασή του. Έστω S το ενδεχόμενο, το άτομο αυτό να πάσχει από την ασθένεια και Θ, A τα ενδεχόμενα εμφάνισης θετικού, αρνητικού τέστ. Σύμφωνα με την εκφώνηση θα είναι

$$P(S) = 0.001, P(A|S) = 0.01, P(\Theta|S^C) = 0.02$$

και άρα

$$P(S^C) = 0.999, P(\Theta|S) = 0.99, P(A|S^C) = 0.98.$$

i) Από το Θεώρημα ολικής πιθανότητας, η πιθανότητα να προκύψει θετική η εξέταση θα είναι

$$P(\Theta) = P(\Theta|S)P(S) + P(\Theta|S^C)P(S^C) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999 = 0.02097$$

ii) Από τον τύπο του Bayes θα ισχύει ότι

$$P(S|\Theta) = \frac{P(\Theta|S)P(S)}{P(\Theta|S)P(S) + P(\Theta|S^C)P(S^C)} = \frac{P(\Theta|S)P(S)}{P(\Theta)} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.02097} \approx 0.047.$$

$$9. \alpha) P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(A^C)P(B)$$

β) όμοια με το (α),

$$\begin{aligned} \gamma) P(A^C \cap B^C) &= P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A^C)P(B^C) \end{aligned}$$

10. Από τις υποθέσεις της εκφώνησης προκύπτει το σύστημα

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.45, \quad P(B \cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma) = 0.4$$

$$P(A \cap \Gamma) = P(A)P(\Gamma) = 0.72, \quad P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma) = 0.36$$

Από τις δύο πρώτες σχέσεις προκύπτει ότι

$$P(B) = \frac{0.45}{P(A)}, P(\Gamma) = \frac{0.4}{0.45} P(A)$$

από όπου, σε συνδυασμό με την τρίτη από τις 4 αρχικές σχέσεις, θα έχουμε ότι

$$P(A)^2 = \frac{0.72 \cdot 0.45}{0.4} \Rightarrow P(A) = 0.9$$

Άρα, $P(\Gamma) = 0.8$ και $P(B) = 0.5$.

11. Ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$ αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 6 ανά 2 με επανάληψη (το (α_1, α_2) σημαίνει ότι το μαύρο ζάρι έφερε α_1 και το κόκκινο α_2). Θα είναι

$$P(A \cap B) = P(\{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}) = \frac{9}{36} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = P(A)P(B)$$

(Εξάλλου, τα A, B είναι ανεξάρτητα διότι αφορούν δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους στοχαστικά πειράματα). Επίσης

$$P(A \cap \Gamma) = P(\{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6)\}) = \frac{9}{36} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = P(A)P(\Gamma)$$

και

$$P(B \cap \Gamma) = P(\{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5), (6,1), (6,3), (6,5)\}) = \frac{9}{36} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = P(B)P(\Gamma)$$

Επομένως, τα A, B, Γ είναι ανά δύο ανεξάρτητα. Για να είναι όμως τα A, B, Γ ανεξάρτητα θα πρέπει επιπλέον να ισχύει ότι

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$$

Παρατηρώντας όμως ότι $A \cap B \cap \Gamma = \emptyset$ τελικά θα έχουμε ότι

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = 0 \neq \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{18}{36} = P(A)P(B)P(\Gamma)$$

και συνεπώς τα A, B, Γ δεν είναι ανεξάρτητα.

12. Έστω K_i το ενδεχόμενο εμφάνισης κεφαλής στην i -ρίψη. Οι τρεις ρίψεις μπορούν να θεωρηθούν ως τρία ανεξάρτητα πειράματα. Επομένως:

$$i) P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = P(K_1)P(K_2)P(K_3) = \frac{1}{2^3}$$

$$ii) \alpha) P(K_1 \cap K_2 \cap K_3 | K_1) = \frac{P(K_1 \cap K_2 \cap K_3)}{P(K_1)} = \frac{P(K_1)P(K_2)P(K_3)}{P(K_1)} = P(K_2)P(K_3) = \frac{1}{2^2}$$

$$\beta) P(K_1 \cap K_2 \cap K_3 | K_1 \cap K_2) = \frac{P(K_1 \cap K_2 \cap K_3)}{P(K_1 \cap K_2)} = \frac{P(K_1)P(K_2)P(K_3)}{P(K_1)P(K_2)} = P(K_3) = \frac{1}{2}$$

$$\gamma) P(K_1 K_2 K_3 | (K_1 K_2) \cup (K_1 K_3) \cup (K_2 K_3)) = \frac{P(K_1 K_2 K_3 ((K_1 K_2) \cup (K_1 K_3) \cup (K_2 K_3)))}{P((K_1 K_2) \cup (K_1 K_3) \cup (K_2 K_3))}$$

παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι ίσος με $P(K_1 K_2 K_3)$ ενώ ο παρονομαστής θα είναι ίσος (τύπος Poincare) με

$$\begin{aligned} & P(K_1 K_2) + P(K_1 K_3) + P(K_2 K_3) - P(K_1 K_2 \cap K_1 K_3) - P(K_1 K_2 \cap K_2 K_3) - P(K_1 K_3 \cap K_2 K_3) + \\ & \quad + P(K_1 K_2 \cap K_1 K_3 \cap K_2 K_3) \\ & = P(K_1 K_2) + P(K_1 K_3) + P(K_2 K_3) - 3P(K_1 K_2 K_3) + P(K_1 K_2 K_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

και άρα

$$P(K_1 K_2 K_3 | (K_1 K_2) \cup (K_1 K_3) \cup (K_2 K_3)) = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}.$$

13. Έστω K_i, Π_i πιθανότητα εκλογής κόκκινης, πράσινης σφαίρας αντίστοιχα από το i -δοχείο.

α) Η πιθανότητα επιλογής κόκκινης σφαίρας από το πρώτο δοχείο και κόκκινης από το δεύτερο είναι

$$P(K_1 \cap K_2) = P(K_2 | K_1)P(K_1) = \frac{8}{11} \cdot \frac{6}{10}$$

β) Η πιθανότητα στο τέλος του πειράματος να μην έχει αλλάξει η σύνθεση των δύο δοχείων είναι

$$\begin{aligned} P((K_1 \cap K_2) \cup (\Pi_1 \cap \Pi_2)) &= P(K_1 \cap K_2) + P(\Pi_1 \cap \Pi_2) = P(K_2 | K_1)P(K_1) + P(\Pi_2 | \Pi_1)P(\Pi_1) \\ &= \frac{8}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{10}. \end{aligned}$$

14. Έστω B το ενδεχόμενο το άτομο να πάσχει από αχρωματοψία, και A, Γ τα ενδεχόμενα να είναι άντρας ή γυναίκα αντίστοιχα.

α) Η πιθανότητα το άτομο να πάσχει από αχρωματοψία αν στην αίθουσα υπάρχουν 40 άνδρες και 70 γυναίκες θα είναι (Θεώρημα ολικής πιθανότητας)

$$P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | \Gamma)P(\Gamma) = 0.14 \cdot \frac{40}{110} + 0.02 \cdot \frac{70}{110} \approx 0.063,$$

β) Η πιθανότητα το άτομο να πάσχει από αχρωματοψία αν έχουμε ίσο πλήθος ανδρών και γυναικών στην αίθουσα θα είναι

$$P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | \Gamma)P(\Gamma) = 0.14 \cdot \frac{1}{2} + 0.02 \cdot \frac{1}{2} = 0.08$$

γ) Η πιθανότητα το άτομο να πάσχει από αχρωματοψία αν έχουμε διπλάσιους άνδρες από γυναίκες στην αίθουσα θα είναι

$$P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | \Gamma)P(\Gamma) = 0.14 \cdot \frac{2}{3} + 0.02 \cdot \frac{1}{3} = 0.1.$$

15. Ισχύει πάντοτε μόνο η τρίτη πρόταση (βλ. άσκ 1).

Ασκήσεις Στατιστικής II

3

1. Έστω ότι ο χρόνος αναμονής X σε λεπτά σε συγκεκριμένο σταθμό του υπογείου σιδηροδρόμου είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x/4, & 0 \leq x < 1 \\ 1/4, & 1 \leq x < 2 \\ x/8, & 2 \leq x < 8 \\ 1, & 8 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Να παρασταθεί γραφικά η $F(x)$ και να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(X \leq 2)$, $P(1 < X \leq 3)$, $P(X > 1 | X \leq 3)$.

2. Από 5 υποψήφιους δωρητές αίματος μόνο οι δύο έχουν ομάδα αίματος που ταιριάζει στον ασθενή που το έχει ανάγκη. Να δοθεί η συνάρτηση πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του αριθμού των δωρητών τους οποίους θα χρειαστεί να ελέγξουμε (ως προς την ομάδα αίματος) προτού βρεθεί ο πρώτος κατάλληλος δωρητής.

3. Σε μια λαχειοφόρο αγορά με 6000 λαχνούς κληρώνεται ένας λαχνός που κερδίζει 1000000 δρχ τρεις λαχνοί που κερδίζουν από 500000 δρχ. και 5 λαχνοί που κερδίζουν από 200000 δρχ. Ποιό είναι το αναμενόμενο κέρδος για ένα άτομο που αγοράζει ένα μόνο λαχνό πληρώνοντας 1000 δρχ;

4. Ένας παίκτης ρίχνει ζάρι μια φορά και κερδίζει 4000 δρχ. αν φέρει άσσο, 13000 δρχ αν φέρει 5 ή 6 ενώ χάνει 6000 δρχ αν φέρει 2, 3 ή 4. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας και η μέση τιμή του κέρδους του παίκτη ανά παιχνίδι.

5. Σε ένα διαγώνισμα με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής δίνονται δύο ερωτήσεις με α απαντήσεις στο πρώτο και β απαντήσεις στο δεύτερο. Αν ο διαγωνιζόμενος διαλέγει τις απαντήσεις στην τύχη ποιός είναι ο μέσος αριθμός ορθών απαντήσεων; ποιά είναι η διασπορά του;

6. Ένα βιβλιοπωλείο αγοράζει 10 βιβλία προς 2000 δραχμές το ένα και τα πουλάει 3000. Αν μετά από ένα έτος υπάρχει η δυνατότητα επιστροφής των απούλητων βιβλίων και η κατανομή του αριθμού X των βιβλίων που πουλιούνται (σε ένα έτος) δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{2x+1}{120} \quad x = 1, 2, \dots, 10$$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή του X και το μέσο κέρδος του βιβλιοπωλείου σε ένα έτος.

7. Σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c , έτσι ώστε οι αντίστοιχοι τύποι να ορίζουν συναρτήσεις πυκνότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.

$$\alpha. f(x) = c(1 - |x|), |x| < 1 \quad \beta. f(x) = cxe^{-\theta x}, x \geq 0 \quad \gamma. f(x) = c/x^4, x \geq 3.$$

8. Η συνάρτηση πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = a + \beta x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Αν $E(X) = \frac{3}{5}$ να βρεθούν τα a και β .

9. Να υπολογιστούν οι τιμές των σταθερών a και β έτσι ώστε η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = a(\beta - x)^2, \quad 0 \leq x \leq \beta.$$

να είναι συνάρτηση πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X με $E(X) = \frac{3}{5}$.

10. Η ποσότητα βενζίνης X (σε χιλιόλιτρα) που πωλεί πρατήριο βενζίνης σε μια μέρα είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x < 1 \\ c, & 1 \leq x < 2 \\ c(3-x), & 2 \leq x < 3. \end{cases}$$

Αφού υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς c , να βρεθούν οι πιθανότητες $P(X \leq 3/4)$, $P(1/2 < X \leq 5/2)$ και $P(X > 9/4)$. Τέλος, να βρεθεί η μέση ποσότητα βενζίνης που πουλάει το πρατήριο σε μια μέρα και η διασπορά $V(X)$.

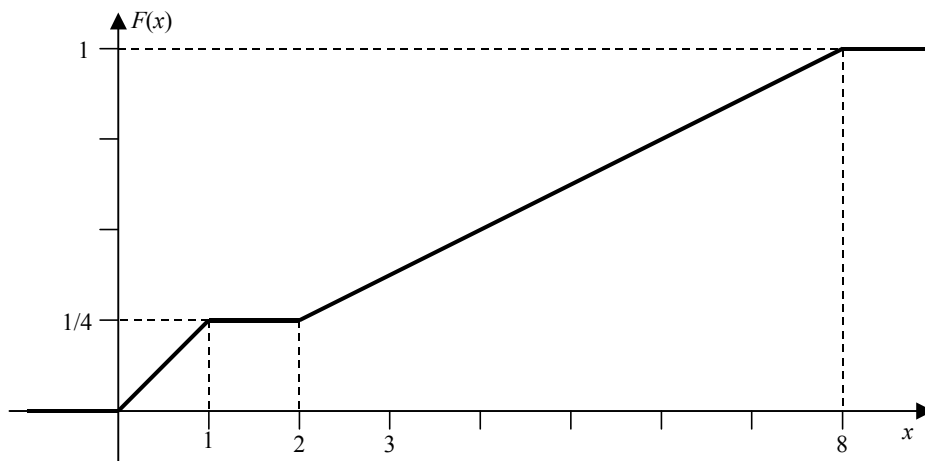
11. Ο χρόνος επισκευής X (σε ώρες) μιας βλάβης σε ένα μηχάνημα ακολουθεί μια συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Αν το κόστος μη λειτουργίας του μηχανήματος για x ώρες είναι x^3 , να βρεθεί το μέσο κόστος ανά βλάβη.

Λύσεις

1. Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ θα παριστάνεται γραφικά ως εξής:



ενώ $P(X \leq 2) = F(2) = 2/8 = 1/4$, $P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = 3/8 - 1/4 = 1/8$ και

$$P(X > 1 | X \leq 3) = \frac{P(1 < X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{F(3) - F(1)}{F(3)} = \frac{3/8 - 1/4}{3/8} = \frac{1}{3}.$$

2. Έστω X ο αριθμός των δωρητών τους οποίους θα χρειαστεί να ελέγξουμε. Αν $\{1, 2\}$ είναι οι υποψήφιοι δωρητές που έχουν ομάδα αίματος που ταιριάζει στον ασθενή και $\{3, 4, 5\}$ οι υπόλοιποι, θέτουμε A_i το ενδεχόμενο επιλογής του δωρητή 1 ή του δωρητή 2 στην i -επιλογή. Η επιλογή

της σειράς εξέτασης των δωρητών είναι τυχαία και επομένως (χρησιμοποιώντας και τον πολλαπλασιαστικό κανόνα για την τομή ενδεχομένων),

$$P(X=1) = P(A_1) = \frac{2}{5} = 0.4,$$

$$P(X=2) = P(A_1^C A_2) = P(A_2 | A_1^C) P(A_1^C) = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = 0.3$$

$$P(X=3) = P(A_1^C A_2^C A_3) = P(A_3 | A_1^C A_2^C) P(A_2^C | A_1^C) P(A_1^C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = 0.2$$

$$P(X=4) = P(A_4 | A_1^C A_2^C A_3^C) P(A_3^C | A_1^C A_2^C) P(A_2^C | A_1^C) P(A_1^C) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = 0.1$$

Ισχύει ότι $X \in \{1, 2, 3, 4\}$ και επαληθεύουμε ότι φυσικά $\sum_{i=1}^4 P(X=i) = 1$. Επομένως,

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 0.4, \quad F(2) = 0.4+0.3=0.7, \quad F(3) = 0.4+0.3+0.2=0.9, \quad F(4) = 0.4+0.3+0.2+0.1=1.$$

3. Έστω X το ποσό που κερδίζει το άτομο από τον λαχνό (δεν συμπεριλαμβάνεται το κόστος του λαχνού). Αν το άτομο επιλέγει τυχαία τον λαχνό που αγοράζει θα ισχύει ότι

$$P(X=1000000) = \frac{1}{6000}, P(X=500000) = \frac{3}{6000}, P(X=200000) = \frac{5}{6000}, P(X=0) = \frac{5991}{6000}$$

θα ισχύει ότι ($X \in \{0, 200000, 500000, 1000000\}$),

$$\begin{aligned} E(X) &= 1000000P(X=1000000) + 500000P(X=500000) + 200000P(X=200000) + 0P(X=0) \\ &= 1000000 \frac{1}{6000} + 500000 \frac{3}{6000} + 200000 \frac{5}{6000} \approx 583.333 \end{aligned}$$

Το καθαρό κέρδος του ατόμου (τώρα συμπεριλαμβάνεται το κόστος του λαχνού) θα είναι

$$Y = X - 1000$$

και άρα τελικά το αναμενόμενο (καθαρό) κέρδος θα είναι

$$E(Y) = E(X - 1000) = E(X) - 1000 \approx 583.333 - 1000 = -416.667 \quad (\text{ζημιά } 416.667 \text{ δρχ.})$$

4. Έστω X το κέρδος του παίκτη. Θα ισχύει ότι

$$P(X=4000) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}, \quad P(X=13000) = P(\{5,6\}) = \frac{2}{6}, \quad P(X=-6000) = P(\{2,3,4\}) = \frac{3}{6}$$

και

$$\begin{aligned} E(X) &= 4000P(X=4000) + 13000P(X=13000) - 6000P(X=-6000) = \\ &= 4000 \frac{1}{6} + 13000 \frac{2}{6} - 6000 \frac{3}{6} = 2000. \end{aligned}$$

5. Έστω X ο αριθμός των σωστών απαντήσεων. Αν οι επιλογές των απαντήσεων των δύο ερωτήσεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (οι επιλογές των δύο απαντήσεων θεωρούνται δύο στοχαστικά ανεξάρτητα πειράματα), θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(\text{λάθος απάντηση στην 1}^{\text{η}} \text{ ερώτηση και λάθος απάντηση στην 2}^{\text{η}} \text{ ερώτηση}) \\ &= P(\text{λάθος απάντηση στην 1}^{\text{η}} \text{ ερώτηση}) P(\text{λάθος απάντηση στην 2}^{\text{η}} \text{ ερώτηση}) \end{aligned}$$

$$= \frac{a-1}{a} \cdot \frac{\beta-1}{\beta}.$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(\text{λάθος απάντηση στην 1}^{\text{η}} \text{ ερώτηση και σωστή απάντηση στην 2}^{\text{η}} \text{ ερώτηση}) \\ &\quad + P(\text{σωστή απάντηση στην 1}^{\text{η}} \text{ ερώτηση και λάθος απάντηση στην 2}^{\text{η}} \text{ ερώτηση}) \\ &= \frac{a-1}{a} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\beta-1}{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(\text{σωστή απάντηση στην 1}^{\text{η}} \text{ ερώτηση και σωστή απάντηση στην 2}^{\text{η}} \text{ ερώτηση}) \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

και επομένως,

$$E(X) = 0P(X=0) + 1P(X=1) + 2P(X=2) = \frac{a-1}{a\beta} + \frac{\beta-1}{a\beta} + \frac{2}{a\beta} = \frac{a+\beta}{a\beta}$$

Επίσης

$$E(X^2) = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) + 2^2 P(X=2) = \frac{a-1}{a\beta} + \frac{\beta-1}{a\beta} + \frac{4}{a\beta} = \frac{2+a+\beta}{a\beta}$$

και τέλος,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2+a+\beta}{a\beta} - \frac{(a+\beta)^2}{a^2\beta^2} = \frac{a^2\beta + a\beta^2 - a^2 - \beta^2}{a^2\beta^2} = \frac{\beta-1}{\beta^2} + \frac{a-1}{a^2}$$

6. Είναι

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{10} x f(x) = \sum_{i=1}^{10} x \frac{2x+1}{120} = \frac{1}{120} \left(2 \sum_{i=1}^{10} x^2 + \sum_{i=1}^{10} x \right) \\ &= \frac{1}{120} \left(2 \frac{10(10+1)(2 \cdot 10 + 1)}{6} + \frac{10(10+1)}{2} \right) = 6.875. \end{aligned}$$

Το κέρδος του βιβλιοπωλείου σε ένα έτος θα είναι $Y = (3000 - 2000)X$ και άρα το μέσο κέρδος του βιβλιοπωλείου θα είναι

$$E(Y) = E(1000X) = 1000E(X) = 6875.$$

7. Και στις τρεις περιπτώσεις θα πρέπει να βρούμε την τιμή της σταθεράς c έτσι ώστε $f(x) \geq 0$ και $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. α) Για να ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη θα πρέπει

$$1 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 c(1+x) dx + \int_0^1 c(1-x) dx = c \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + c \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = c$$

και άρα $c = 1$ (επαληθεύουμε ότι για $c = 1$ ισχύει ότι $f(x) \geq 0$).

β) Όμοια με το (α) θα πρέπει

$$1 = \int_0^{\infty} c x e^{-\theta x} dx = c \int_0^{\infty} x \left(\frac{e^{-\theta x}}{-\theta} \right)' dx = c \left[x \frac{e^{-\theta x}}{-\theta} \right]_0^{\infty} - c \int_0^{\infty} \frac{e^{-\theta x}}{-\theta} dx = \frac{c}{\theta} \left[\frac{e^{-\theta x}}{-\theta} \right]_0^{\infty} = \frac{c}{\theta^2}$$

και άρα $c = \theta^2$ (επαληθεύοντας ότι αν $c = \theta^2$ τότε και $f(x) \geq 0$).

γ) Θα πρέπει

$$1 = \int_3^{\infty} \frac{c}{x^4} dx = c \int_3^{\infty} x^{-4} dx = c \left[\frac{x^{-3}}{-3} \right]_3^{\infty} = c \frac{1}{3^4}$$

και άρα $c = 3^4$ (επαληθεύουμε και πάλι ότι για $c = 3^4$ ισχύει ότι $f(x) \geq 0$).

8. Τα α, β θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ισχύει ότι $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ και $E(X) = 3/5$. Για να ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη θα πρέπει

$$1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (a + \beta x^2) dx = \left[ax + \beta \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = a + \frac{\beta}{3}$$

ενώ για να ικανοποιείται η τρίτη θα πρέπει

$$\frac{3}{5} = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^1 x(a + \beta x^2) dx = \left[a \frac{x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{\beta}{4}$$

Άρα θα πρέπει

$$\begin{cases} a + \frac{\beta}{3} = 1 \\ \frac{a}{2} + \frac{\beta}{4} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - \frac{\beta}{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\beta}{4} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ \beta = \frac{6}{5} \end{cases}$$

και οι τιμές αυτές είναι αποδεκτές διότι επαληθεύουν και τη συνθήκη $f(x) \geq 0$.

9. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση θα πρέπει τα α, β να είναι τέτοια ώστε $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ και $E(X) = 1$. Επομένως θα πρέπει

$$1 = \int_0^{\beta} a(\beta - x)^2 dx = a \left[-\frac{(\beta - x)^3}{3} \right]_0^{\beta} = a \frac{\beta^3}{3}$$

και

$$\begin{aligned} 1 = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^{\beta} xa(\beta - x)^2 dx = a \int_0^{\beta} (\beta^2 x + x^3 - 2\beta x^2) dx \\ &= a \left[\frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{2\beta x^3}{3} \right]_0^{\beta} = a \frac{\beta^4}{12} \end{aligned}$$

Άρα τελικά θα πρέπει

$$\begin{cases} a \frac{\beta^3}{3} = 1 \\ a \frac{\beta^4}{12} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\beta^3 = 3 \\ a\beta^3 \cdot \beta = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4^3} \\ \beta = 4 \end{cases}$$

Οι τιμές αυτές είναι αποδεκτές διότι επαληθεύουν και τη συνθήκη $f(x) \geq 0$.

10. Θα βρούμε την τιμή της σταθεράς c έτσι ώστε $f(x) \geq 0$ και $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Θα πρέπει

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 cx dx + \int_1^2 c dx + \int_2^3 c(3-x) dx = c \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + c[x]_1^2 + c \left[-\frac{(3-x)^2}{2} \right]_2^3 = \frac{c}{2} + c + \frac{c}{2} = 2c$$

και άρα $c = 1/2$ (επαληθεύουμε ότι για $c = 1/2$ ισχύει και ότι $f(x) \geq 0$). Στη συνέχεια θα έχουμε

$$P(X \leq \frac{3}{4}) = F(\frac{3}{4}) = \int_{-\infty}^{3/4} f(x) dx = \int_0^{3/4} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{3/4} = \frac{9}{64},$$

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}) &= F(\frac{5}{2}) - F(\frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{5/2} f(x) dx = \int_{1/2}^1 \frac{x}{2} dx + \int_1^2 \frac{1}{2} dx + \int_2^{5/2} \frac{3-x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1/2}^1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{(3-x)^2}{2} \right]_2^{5/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{7}{8}, \end{aligned}$$

$$P(X > \frac{9}{4}) = 1 - F(\frac{9}{4}) = \int_{9/4}^3 f(x) dx = \int_{9/4}^3 \frac{3-x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{(3-x)^2}{2} \right]_{9/4}^3 = \frac{9}{64}.$$

Τέλος,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \frac{x}{2} dx + \int_1^2 x \frac{1}{2} dx + \int_2^3 x \frac{3-x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \left[3 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \frac{x}{2} dx + \int_1^2 x^2 \frac{1}{2} dx + \int_2^3 x^2 \frac{3-x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \left[3 \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_2^3 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

και άρα

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{8}{3} - \frac{3^2}{2^2} = \frac{5}{12}.$$

11. Το κόστος επισκευής είναι $Y = X^3$ και επομένως το μέσο κόστος ανά βλάβη θα είναι

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Ασκήσεις Στατιστικής II

4

1. Η πιθανότητα να πετύχει ένας σκοπευτής το στόχο στις 5 από τις 10 βολές είναι τριπλάσια της πιθανότητας να τον πετύχει στις 4 από τις 10. Ποιά είναι η πιθανότητα στις 5 ρίψεις να πετύχει το στόχο (α) τουλάχιστον μια φορά, και (β) το πολύ 4 φορές.

2. Το 70% των αυτοκινήτων που φτάνουν σε μια συγκεκριμένη διασταύρωση στρίβουν αριστερά και το 30% δεξιά. Αν η επιλογή της κατεύθυνσης κάθε αυτοκινήτου είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των υπολοίπων τότε να βρεθεί η πιθανότητα σε 15 αυτοκίνητα που φτάνουν στη διασταύρωση (α) τουλάχιστον 10 να στρίψουν αριστερά, και (β) τουλάχιστον 10 να στρίψουν στην ίδια κατεύθυνση.

3. Ας υποθέσουμε ότι ένα αεροπλάνο μπορεί να πραγματοποιήσει επιτυχή πτήση μόνο αν τουλάχιστον οι μισές από τις μηχανές που διαθέτει λειτουργούν. Αν η πιθανότητα να χαλάσει μια μηχανή είναι $1-p$, για ποιές τιμές του p είναι ένα δικινητήριο αεροπλάνο ασφαλέστερο από ένα τετρακινητήριο;

4. Μια δακτυλογράφος δακτυλογραφεί με σταθερό ρυθμό 60 λέξεις το λεπτό και η πιθανότητα να δακτυλογραφήσει μια λέξη λανθασμένα είναι 0.04. Αν κάθε λανθασμένη λέξη απαιτεί χρόνο 15 δευτερολέπτων για να διορθωθεί τότε (α) να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση του χρόνου T (σε δευτερόλεπτα) που απαιτείται για τη σωστή δακτυλογράφηση ενός κειμένου 450 λέξεων, και (β) μήπως είναι προτιμότερο ο ρυθμός δακτυλογράφησης να είναι 45 λέξεις το λεπτό αν αυτός ο ρυθμός μειώνει την πιθανότητα λανθασμένης δακτυλογράφησης μιας λέξης σε 0.02;

5. Αν η τ.μ. X δηλώνει τον αριθμό των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές τότε να βρεθεί η σ.π. της τ.μ. $Y = n - X$. Ποια η φυσική ερμηνεία της τ.μ. Y ;
6. Ένας ποδοσφαιριστής χτυπάει συνεχώς πέναλτι με πιθανότητα επίτευξης γκολ ίση με p . Ποια είναι η πιθανότητα να επιτύχει για πρώτη φορά γκολ σε ζυγό χτύπημα πέναλτι;
7. Δύο φίλοι A και B παίζουν το εξής παιχνίδι: Ένα ζάρι ρίχνεται συνεχώς μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά άσπος ή έξι και έστω X ο αριθμός των ρίψεων που θα απαιτηθούν. Αν το X είναι άρτιος αριθμός, ο παίκτης A δίνει στον B ποσό α δραχμών ενώ αν είναι περιττός, ο παίκτης B δίνει στον A ποσό β δραχμών. (α) Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. X . (β) Να βρεθεί η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης A . Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης B ; (γ) Ναδειχθεί ότι για να είναι το παιχνίδι δίκαιο θα πρέπει να ισχύει $2\alpha - 3\beta = 0$.
8. Ο αριθμός των ελαττωματικών σημείων (π.χ. μικροσκοπικές οπές) της μόνωσης ενός ηλεκτρικού καλωδίου ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 1 ελαττωματικό σημείο σε κάθε 30m καλωδίου. (α) Να βρεθεί η πιθανότητα να έχει 2 ελαττωματικά σημεία ένα καλώδιο μήκους 30m. (β) Αν επιλέξουμε τυχαία 3 καλώδια μήκους 30m το καθένα, να υπολογιστεί η πιθανότητα να έχει 2 ελαττωματικά σημεία μόνο το ένα καλώδιο. (γ) Να απαντηθούν τα ερωτήματα (α) και (β) όταν τα καλώδια έχουν μήκος 60m το καθένα.
9. Σε μια επιχείρηση με 500 εργαζομένους να βρεθεί η πιθανότητα να έχουν γεννηθεί την Πρωτοχρονιά 3 εργαζόμενοι. Να γίνει υπολογισμός χρησιμοποιώντας (α) την ακριβή κατανομή, και (β) την προσέγγιση με την κατανομή Poisson.
10. Ο αριθμός των θαλάσσιων ατυχημάτων (πνιγμών) που συμβαίνουν σε ένα χρόνο σε μια πόλη 100000 κατοίκων είναι τ.μ. X με $E(X)=2$. Ποιά είναι η πιθανότητα, σε μια πόλη 300.000 κατοίκων να έχουμε (α) 0, (β) 2, (γ) 2 έως 4 και (δ) το πολύ 2 θαλάσσια ατυχήματα το χρόνο.
11. Ένας φαρμακοποιός έχει στην αποθήκη του 16 μπουκάλια παιδικού αντιπυρετικού εκ των οποίων στα 5 η ημερομηνία λήξης είναι σε 10 ημέρες ενώ στα υπόλοιπα σε 1 χρόνο. Αν διαλέξει 8 μπουκάλια (στην τύχη) για έλεγχο, ποιά είναι η πιθανότητα να βρει τουλάχιστον 3 με την κοντινή ημερομηνία λήξης;
12. Ο χρόνος επισκευής X (σε ώρες) μιας βλάβης σε ένα μηχάνημα ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$. Αν το κόστος μη λειτουργίας του μηχανήματος για X ώρες είναι X^3 να βρεθεί το μέσο κόστος ανά βλάβη.
13. Έστω ότι η διάρκεια X μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 5 λεπτά. Αν κάποιος φθάσει σε ένα τηλεφωνικό θάλαμο ακριβώς πριν από μας, ποιά είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουμε (α) περισσότερο από 5 λεπτά, και (β) μεταξύ 5 και 10 λεπτών.
14. Αν η τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου λ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
(α) $P(X \leq 1) = P(X > 1)$, (β) $P(X \leq 2) = 2P(X > 2)$, (γ) $E(X) = 5$, (δ) $V(X) = E(X)$.
15. Η διάρκεια X (σε sec) εκτέλεσης ενός προγράμματος σε Η/Υ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με $\lambda = 30^{-1} \text{ sec}^{-1}$. Αν στον Η/Υ ξεκινήσει ταυτόχρονα η εκτέλεση 10 τέτοιων προγραμμάτων, να βρεθεί η πιθανότητα να εκτελούνται περισσότερα από 2 προγράμματα 60sec μετά την έναρξη της εκτέλεσής τους.

Απαντήσεις

- 1: (α) 0.9981 (β) 0.8141 2: (α) 0.7216 (β) 0.7253 3: $p < 2/3$ 4: (α) $E(T) = 720$, $V(T) = 3888$ (β) όχι 6: $q/(1+q)$ 7: (α) $G(1/3)$ (β) $3/5$ και $2/5$ 8: (α) 0.18 (β) 0.36 (γ) 0.27 και 0.43 9: (α) 0.10891 (β) 0.10889 10: (α) 0.002478 (β) 0.0446176 (γ) 0.2677057 (δ) 0.0619688 11: 0.5 12: $1/4$ 13: (α) 0.368 (β) 0.233 14: (α) $\ln 2$ (β) $(\ln 3)/2$ (γ) $1/5$ (δ) 1 15: 0.142447