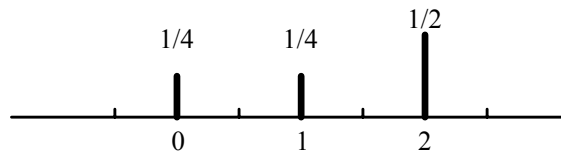


3. Χαρακτηριστικές Παράμετροι Κατανομών

- Αναμενόμενη ή μέση τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι σε κάθε τ.μ. X αντιστοιχεί μία κατανομή. Αν και η συνάρτηση κατανομής F_X (ή ισοδύναμα η σ.π./σ.π.π. f_X για X διακριτή/συνεχή) περιγράφει επακριβώς την κατανομή αυτή, δυστυχώς δεν δίνει άμεσα κάποια πληροφορία σχετικά με τις τιμές που μπορεί να πάρει η τ.μ. X . Για παράδειγμα, θα ήταν αρκετά χρήσιμο να γνωρίζουμε «γύρω» από ποια τιμή «κυμαίνεται» η τ.μ. X . Με άλλα λόγια, ενδιαφερόμαστε για την τιμή «γύρω» από την οποία είναι κατανεμημένη η συνολική πιθανότητα της τ.μ. X . Ας ονομάσουμε την τιμή αυτή «μέση τιμή» της τ.μ. X .

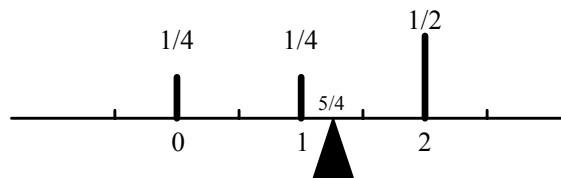
Ενδεχομένως, θα μπορούσε κανείς να προτείνει διάφορους ορισμούς μιας τέτοιας «μέσης τιμής». Όπως θα φανεί και σε όσα ακολουθούν ένας ιδανικός τέτοιος ορισμός είναι αυτός που θέτει ως «μέση τιμή» μιας κατανομής το «κέντρο βάρους» της κατανομής αυτής. Το «κέντρο βάρους» αυτό υπολογίζεται θεωρώντας ότι η συνολική πιθανότητα είναι μάζα που έχει κατανεμηθεί είτε σε διάφορα σημεία του $\mathbb{R}$ (αν πρόκειται για διακριτή τ.μ.), είτε έχει απλωθεί σε ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ (αν πρόκειται για συνεχή τ.μ.). Για παράδειγμα, αν μία τ.μ. X παίρνει τιμές 0, 1 και 2 με πιθανότητες $1/4$ και $1/4$ και $1/2$ αντίστοιχα, τότε η σ.π. της σχηματικά θα είναι



Θεωρώντας τώρα ότι στα σημεία 0, 1, 2 υπάρχει μάζα (πιθανότητας) μεγέθους $1/4$, $1/4$ και $1/2$ αντίστοιχα, τότε το κέντρο βάρους θα είναι το

$$0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Συνεπώς, θα θεωρούμε ότι η μέση τιμή αυτής της τ.μ. θα είναι το $5/4$:



Ας δούμε όμως αρχικά για την διακριτή και στη συνέχεια για την συνεχή περίπτωση ποιος θα είναι ο αυστηρός ορισμός της μέσης τιμής μιας τ.μ.

Ορισμός 3.1. (Μέση τιμή διακριτής τ.μ.). Έστω X μία διακριτή τ.μ. με τιμές στο σύνολο $\{a_1, a_2, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f_X . Η ποσότητα

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(X = a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_X(a_i) \quad (= \sum_{x \in X(\Omega)} x f_X(x))$$

(υπό τον όρο ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει απόλυτα δηλ. $\sum |a_i| f_X(a_i) < \infty$) θα καλείται μέση ή αναμενόμενη τιμή ή πληθυσμιακός μέσος της τ.μ. X .

Σύμφωνα λοιπόν και με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, η μέση τιμή μιας τ.μ. είναι στην ουσία το «κέντρο βάρους» της συνολικής μάζας πιθανότητας που έχει κατανεμηθεί στον $\mathbb{R}$ (από τον Ω) μέσω της τ.μ. X .

Προφανώς, αν $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$ τότε

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x f_X(x).$$

Αξίζει σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα (το οποίο θα διατυπωθεί αυστηρότερα και θα αποδειχθεί σε επόμενο κεφάλαιο). Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογεί και τον παραπάνω ορισμό της μέσης τιμής μιας τ.μ.

Παρατήρηση 3.1. Νόμος των μεγάλων αριθμών. Έστω ότι εκτελούμε ακριβώς το ίδιο τυχαίο πείραμα n φορές (θεωρώντας ότι αυτά τα n όμοια πειράματα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα) και X_i είναι η τ.μ. που εκφράζει το αποτέλεσμα του i -πειράματος. (π.χ. ρίχνουμε ένα ζάρι n φορές και θεωρούμε την τ.μ. X_i ή οποία εκφράζει το αποτέλεσμα της i -ρίψης, $i=1, 2, \dots, n$). Επειδή τα n πειράματα είναι όμοια, οι τ.μ. X_i θα έχουν την ίδια κατανομή F_X και την ίδια μέση τιμή $E(X)$. Θεωρούμε την νέα τ.μ.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

η οποία καλείται και δειγματικός μέσος (στο παράδειγμα με το ζάρι, $\bar{X}_n$ είναι προφανώς ο μέσος όρος των ενδείξεων στις n ρίψεις). Σύμφωνα με το νόμο των μεγάλων αριθμών, αποδεικνύεται ότι όσο το n μεγαλώνει, ο δειγματικός μέσος $\bar{X}_n$ συγκλίνει στην μέση τιμή $E(X)$. Ο νόμος αυτός φυσικά ισχύει και για συνεχείς τ.μ. (θα ορίσουμε σε επόμενη παράγραφο τη μέση τιμή μιας συνεχούς τ.μ.).

Για παράδειγμα, έστω X η τ.μ. που εκφράζει το ύψος ενός τυχαία επιλεγμένου ατόμου από έναν πληθυσμό (έστω ότι η X έχει σ.κ. F_X και μέση τιμή $E(X)$). Αν μετρήσουμε το ύψος ενός μεγάλου αριθμού n τυχαία επιλεγμένων ατόμων, και υπολογίζουμε τον αντίστοιχο μέσο όρο $\bar{X}_n$, τότε περιμένουμε αυτός να είναι περίπου ίσος με την μέση τιμή $E(X)$ της κατανομής F_X . Αν το $n \rightarrow \infty$ (δηλαδή «καταγράψουμε» όλο τον πληθυσμό) τότε ο μέσος όρος θα είναι ίσος με την $E(X)$ (με πιθανότητα 1) και για το λόγο αυτό ο μέσος $E(X)$ καλείται *πληθυσμιακός μέσος*. Ο $\bar{X}_n$ είναι ο μέσος όρος του δείγματος των n ατόμων και για αυτό καλείται *δειγματικός μέσος*. Συνήθως, στη στατιστική μας ενδιαφέρει να «εκτιμήσουμε» τον πληθυσμιακό από το δειγματικό μέσο (οι μέθοδοι «εκτιμήσεων» αποτελούν σημαντικό μέρος του μαθήματος Στατιστική ΙΙΙ).

Παράδειγμα. 3.1. (συνέχεια Άσκησης 1.9: Ένας παίκτης ρουλέτας χρησιμοποιεί το ακόλουθο σύστημα. Ποντάρει στο κόκκινο 1χιλ και αν κερδίσει αποχωρεί. Αν χάσει, ποντάρει ξανά στο κόκκινο αυτή τη φορά 2χιλ και ανεξάρτητα με το αποτέλεσμα αποχωρεί. Θεωρώντας ότι η πιθανότητα να έρθει κόκκινο είναι $\frac{1}{2}$, να βρείτε την πιθανότητα να αποχωρήσει ο παίκτης κερδισμένος. Γιατί δεν χρησιμοποιεί το σύστημα αυτό ο καθένας για να κερδίζει;).

Ο δειγματικός χώρος του συγκεκριμένου πειράματος μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ο

$$\Omega = \{(K,K), (K,M), (M,K), (M,M)\}$$

όπου π.χ. (K,M) είναι το ενδεχόμενο να έρθει Κόκκινο την πρώτη φορά και Μαύρο τη δεύτερη. Τα 4 στοιχειώδη ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα με πιθαν. $1/4$. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} P(\{(K,K)\}) &= P(\text{Κόκκινο την πρώτη φορά και Κόκκινο τη δεύτερη φορά}) = \\ &= P(\text{Κόκκινο την πρώτη φορά})P(\text{Κόκκινο τη δεύτερη φορά}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

επειδή τα δύο ενδεχόμενα αφορούν στοχαστικά ανεξάρτητα πειράματα (πρώτο και δεύτερο «γύρισμα» της ρουλέτας). Το ίδιο θα ισχύει και για τα 4 στοιχειώδη ενδεχόμενα. Έστω τώρα Y η τυ-

χαία μεταβλητή που είναι ίση με 1 αν αποχωρήσει ο παίκτης κερδισμένος και 0 διαφορετικά Έστω επίσης X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το κέρδος του παίκτη. Θα έχουμε ότι

στοιχ. ενδεχ.	X	Y	
(K,K)	1000	1	πόνταρε την πρώτη φορά 1000 στο K, κέρδισε και αποχώρησε
(K,M)	1000	1	πόνταρε την πρώτη φορά 1000 στο K, κέρδισε και αποχώρησε
(M,K)	$-1000+2000 = 1000$	1	πόνταρε την πρώτη φορά 1000 στο K, έχασε και ξαναπόνταρε 2000 στο K και κέρδισε
(M,M)	$-1000-2000 = -3000$	0	πόνταρε την πρώτη φορά 1000 στο K, έχασε και ξαναπόνταρε 2000 στο K και ξαναέχασε.

Επομένως,

$$P(Y=1) = P(\{\omega : Y(\omega) = 1\}) = P(\{(K,K), (K,M), (M,K)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

και ο παίκτης κερδίζει με πιθανότητα $3/4 = 75\%$. Αναφορικά με το τελευταίο ερώτημα της άσκησης 1.9, παρατηρούμε ότι, ο παίκτης κερδίζει με πιθανότητα 75% ενώ χάνει με 25%. Όταν όμως κερδίζει, κερδίζει 1χιλ ενώ όταν χάνει, χάνει 3χιλ. Μακροπρόθεσμα, λοιπόν, ο παίκτης αναμένεται να κερδίσει στο 75% των περιπτώσεων, διότι, από το νόμο των μεγάλων αριθμών, για το ποσοστό $\bar{Y}$ των περιπτώσεων που ο παίκτης κέρδισε (π.χ. σε n δοκιμές) θα ισχύει ότι

$$\bar{Y} \rightarrow E(Y) = \sum_{a=1}^2 a_i P(X = a_i) = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) = P(Y=1) = 0.75$$

Από την άλλη όμως, το ποσό που παίρνει κάθε φορά που κερδίζει είναι το $1/3$ από το ποσό που πληρώνει κάθε φορά που χάνει. Για να δούμε αν μακροπρόθεσμα ο παίκτης χάνει ή κερδίζει, πρέπει να βρούμε το αναμενόμενο κέρδος $E(X)$. Επειδή $X \in \{1000, -3000\}$ θα ισχύει ότι

$$E(X) = \sum_{a=1}^2 a_i P(X = a_i) = 1000P(X=1000) - 3000P(X=-3000) = 1000 \frac{3}{4} - 3000 \frac{1}{4} = 0$$

Επομένως, σε κάθε παιχνίδι, το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη είναι μηδενικό. Από το νόμο των μεγάλων αριθμών, αναμένεται ότι μετά από έναν μεγάλο αριθμό από παιχνίδια (θεωρητικά άπειρο), το μέσο κέρδος του παίκτη θα είναι περίπου ίσο με 0.

Άσκηση 3.1. (συνέχεια άσκ. 2.2.) Να βρεθούν οι μέσες τιμές των τ.μ. X, Y, Z με αντίστοιχες σ.π.

$$\alpha. f(x) = \frac{5-x}{15}, x=0,1,2,3,4 \quad \beta. f(x) = \frac{2x}{v(v+1)}, x=1,2,\dots,v \quad \gamma. f(x) = \frac{3^{x-1}}{4^x}, x=1,2,\dots$$

Λύση. α) Θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i f(a_i) = \sum_{i=0}^4 i f(i) = 0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + 4 \cdot f(4) \\ &= \frac{5-1}{15} + 2 \frac{5-2}{15} + 3 \frac{5-3}{15} + 4 \frac{5-4}{15} = \frac{1}{15} (4+6+6+4) = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \approx 1.33 \end{aligned}$$

β) Όμοια,

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f(a_i) = \sum_{i=1}^v i f(i) = \sum_{i=1}^v i \frac{2i}{v(v+1)} = \frac{2}{v(v+1)} \sum_{i=1}^v i^2 = \frac{2}{v(v+1)} \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{2v+1}{3}$$

γ) Θα είναι,

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} i f(i) = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{3^{i-1}}{4^i} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}.$$

Είναι γνωστό ότι, για $0 < \alpha < 1$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$$

και παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη ως προς a παίρνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a^{i-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$$

και άρα τελικά

$$E(Z) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = 4.$$

Άσκηση 3.2. Η κατανομή των κερδών σε μία σειρά λαχείων «Ξυστό» είναι (σύμφωνα με τα αναγραφόμενα στην πίσω πλευρά του λαχείου):

Κατηγορία κέρδους (δρχ)	Κερδίζοντα λαχεία
300	1.530.000
1.000	183.600
5.000	30.600
10.000	10.200
30.000	1.867
1.000.000	10
3.000.000	6
30.000.000	4
Σύνολο	1.756.287

Λαχεία έκδοσης: 8.160.000 (300δρχ. η τιμή του κάθε δελτίου)

Αν X είναι το κέρδος από την αγορά ενός τυχαία επιλεγμένου λαχείου, να βρεθεί η κατανομή της X και το μέσο κέρδος $E(X)$.

Λύση. Συνυπολογίζοντας τις 300 δρχ που κοστίζει κάθε λαχείο θα ισχύει ότι

$$P(X = -300) = 1 - \frac{1.756.287}{8.160.000}, P(X = 0) = \frac{1.530.000}{8.160.000}, P(X = 700) = \frac{183.600}{8.160.000}$$

$$P(X = 4700) = \frac{30.600}{8.160.000}, P(X = 9.700) = \frac{10.200}{8.160.000}, P(X = 29.700) = \frac{1.867}{8.160.000}$$

$$P(X = 999.700) = \frac{10}{8.160.000}, P(X = 2.999.700) = \frac{6}{8.160.000}, P(X = 29.999.700) = \frac{4}{8.160.000}$$

και άρα

$$\begin{aligned} E(X) &= -300 \left(1 - \frac{1.756.287}{8.160.000} \right) + 0 \cdot \frac{1.530.000}{8.160.000} + 700 \frac{183.600}{8.160.000} + 4700 \frac{30.600}{8.160.000} \\ &\quad + \frac{9.700 \cdot 10.200}{8.160.000} + \frac{29.700 \cdot 1.867}{8.160.000} + \frac{999.700 \cdot 10}{8.160.000} + \frac{2.999.700 \cdot 6}{8.160.000} + \frac{29.999.700 \cdot 4}{8.160.000} \\ &= -165. \end{aligned}$$

Έτσι, αν ένας παίκτης αγοράζει «Ξυστό» από σειρές με την παραπάνω κατανομή κερδών, τότε μακροπρόθεσμα αναμένεται να έχει μέση ζημιά περίπου 165 δρχ. (ανά λαχείο). Βέβαια, αυτό δεν ισχύει με βεβαιότητα, άλλα με μεγάλη πιθανότητα (≈ 1). Για το λόγο αυτό ο παίκτης συνεχίζει να παίζει ελπίζοντας ότι θα αποτελέσει την εξαίρεση και θα έχει κέρδος από το παραπάνω παιχνίδι.

Σε αρκετές περιπτώσεις, ενώ είναι γνωστή η κατανομή μιας τ.μ. X , ζητείται ο υπολογισμός της μέσης τιμής μιας τ.μ. $Y = g(X)$ που είναι συνάρτηση του X . Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε, μέσω της μεθόδου που αναπτύχθηκε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου, να βρούμε την κατανομή της νέας τ.μ. Y και στη συνέχεια να υπολογίσουμε, μέσω του γνωστού τύπου, την $E(Y)$. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της $E(Y)$ που δεν προϋποθέτει τον ενδιάμεσο υπολογισμό της κατανομής της τ.μ. Y . Συγκεκριμένα ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.1. Έστω X μία διακριτή τ.μ. με τιμές στο σύνολο $\{a_1, a_2, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f_X . Αν $Y = g(X)$, τότε

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(a_i) f_X(a_i).$$

Απόδειξη. Έστω B το σύνολο τιμών της τ.μ. Y . Από τον ορισμό της μέσης τιμής της τ.μ. Y θα είναι,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y \in B} y P(Y = y) = \sum_{y \in B} y P(g(X) = y) = \sum_{y \in B} y \sum_{i: g(a_i)=y} P(X = a_i) = \sum_{y \in B} \sum_{i: g(a_i)=y} y P(X = a_i) \\ &= \sum_{y \in B} \sum_{i: g(a_i)=y} g(a_i) P(X = a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(a_i) P(X = a_i). \end{aligned}$$

Άσκηση 3.3. α) Να βρεθεί η μέση τιμή των κατανομών που περιγράφονται από τους επόμενους πίνακες (συναρτήσεις πιθανότητας)

i)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.5	0.1	0.3	0.1

ii)

x	2	4	6	8
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

β) Ποιά είναι η μέση τιμή των τυχαίων μεταβλητών X^2 , $5X + 3$, $\sqrt{X}$ στις προηγούμενες περιπτώσεις;

Λύση. i) α) Η μέση τιμή της τ.μ. X θα είναι

$$E(X) = \sum_{i=0}^3 i P(X = i) = 0 P(X = 0) + 1 P(X = 1) + 2 P(X = 2) + 3 P(X = 3) = 0.1 + 0.6 + 0.3 = 1$$

β) Α τρόπος: Εάν χρησιμοποιήσουμε ως ενδιάμεσο βήμα τον υπολογισμό της σ.κ. της τ.μ. $Y = X^2$ θα έχουμε ότι ($Y \in \{0, 1, 4, 9\}$),

$$P(Y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 0.5, \quad P(Y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = 1) = 0.1$$

$$P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = 2) = 0.3, \quad P(Y = 9) = P(X^2 = 9) = P(X = 3) = 0.1$$

και άρα

$$E(Y) = 0 P(Y = 0) + P(Y = 1) + 4 P(Y = 4) + 9 P(Y = 9) = 0.1 + 1.2 + 0.9 = 2.2$$

Β Τρόπος. Θα αξιοποιήσουμε την Πρόταση 3.1 ($g(x) = x^2$)

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X^2) = \sum_{i=0}^3 i^2 P(X = i) = 0^2 P(X = 0) + 1^2 P(X = 1) + 2^2 P(X = 2) + 3^2 P(X = 3) \\ &= 0.1 + 1.2 + 0.9 = 2.2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι στην ουσία οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι.

Για τη μέση τιμή της τ.μ. $Z = 5X + 3$ θα έχουμε με τον Α τρόπο ότι ($Z \in \{3, 8, 13, 18\}$)

$$P(Z = 3) = P(5X + 3 = 3) = P(X = 0) = 0.5, \quad P(Z = 8) = P(5X + 3 = 8) = P(X = 1) = 0.1$$

$$P(Z = 13) = P(5X + 3 = 13) = P(X = 2) = 0.3, \quad P(Z = 18) = P(5X + 3 = 18) = P(X = 3) = 0.1$$

και άρα

$$E(Z) = 3P(Z = 3) + 8P(Y = 8) + 13P(Y = 13) + 18P(Y = 18) = 1.5 + 0.8 + 3.9 + 1.8 = 8$$

Β Τρόπος. Θα αξιοποιήσουμε την Πρόταση 3.1 ($g(x) = 5x+3$)

$$E(Z) = E(5X + 3) = \sum_{i=0}^3 (5i + 3)P(X = i) = \dots = 8$$

Τέλος, η μέση τιμή της τ.μ. $W = \sqrt{X}$ θα είναι (από την Πρόταση 3.1):

$$\begin{aligned} E(W) &= E(\sqrt{X}) = \sum_{i=0}^3 \sqrt{i}P(X = i) = \sqrt{0}P(X = 0) + \dots + \sqrt{3}P(X = 3) \\ &= 0.1 + \sqrt{2} \cdot 0.3 + \sqrt{3} \cdot 0.1 = 0.697 \end{aligned}$$

ii) Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο εργαζόμαστε και για την κατανομή που περιγράφεται από τον πίνακα (ii).

Η μέση τιμή μιας τ.μ. έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

Πρόταση 3.2. Αν X είναι μία διακριτή τ.μ., $a, b \in \mathbb{R}$ και g_1, g_2 δύο πραγματικές συναρτήσεις, τότε

- 1) $E(a) = a$,
- 2) $E(aX + b) = aE(X) + b$
- 3) $E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X))$.

Απόδειξη. 1) Αν $X = a$, δηλαδή $P(X = a) = 1$, τότε

$$E(a) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = aP(X = a) = a.$$

2) Από την Πρόταση 3.1. θα ισχύει ότι

$$E(aX + b) = \sum_{x \in X(\Omega)} (ax + b)P(X = x) = a \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) + b \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = aE(X) + b.$$

2) Θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} E(g_1(X) + g_2(X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} (g_1(x) + g_2(x))P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} g_1(x)P(X = x) + \sum_{x \in X(\Omega)} g_2(x)P(X = x) \\ &= E(g_1(X)) + E(g_2(X)). \end{aligned}$$

Άσκηση 3.4. Έστω ότι σε μία κληρωτίδα μπαίνουν τα ονόματα n παικτών ο καθένας από τους οποίους δίνει ένα χρηματικό ποσό a για να συμμετάσχει στο παιχνίδι. Ο παίκτης του οποίου το όνομα θα κληρωθεί κερδίζει όλο το ποσό που έχει συγκεντρωθεί. Ποιο θα είναι το αναμενόμενο κέρδος ενός παίκτη; Αν αυτός που διενεργεί την κλήρωση κρατάει ένα ποσοστό p (γκανιότα) από τα χρήματα που μαζεύονται, ποιο θα είναι τότε το αναμενόμενο κέρδος ενός παίκτη;

Λύση. Έστω $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ τα ονόματα των n παικτών. Θα ισχύει προφανώς ότι $P(\{\omega\}) = 1/n$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Έστω $X = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν κερδίσει ή όχι ένας συγκεκριμένος (π.χ. ο $1^{ος}$) παίκτης. Θα είναι

$$P(X = 1) = P(\{a_1\}) = \frac{1}{n}, \quad P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{n}$$

και

$$E(X) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) = \frac{1}{n}$$

Το καθαρό κέρδος π.χ. του $1^{ου}$ παίκτη θα είναι

$$Y = naX - a = \begin{cases} (n-1)a & \text{αν } X = 1 \\ -a & \text{αν } X = 0 \end{cases}$$

Επομένως,

$$E(Y) = E(naX - a) = naE(X) - a = na \frac{1}{n} - a = 0$$

Το αναμενόμενο λοιπόν κέρδος κάθε παίκτη θα είναι 0. Μακροπρόθεσμα λοιπόν το μέσο κέρδος κάθε παίκτη θα είναι 0 (από το νόμο των μεγάλων αριθμών). Αυτό ήταν αναμενόμενο, διότι κάθε παίκτης θα έχει το ίδιο μέσο κέρδος και αν π.χ. αυτό ήταν θετικό τότε μακροπρόθεσμα θα κέρδιζαν όλοι οι παίκτες κάτι που δεν είναι φυσιολογικό διότι τα χρήματα που εξέρχονται από το παιχνίδι (ως καθαρά κέρδη) θα πρέπει να είναι ίσα με αυτά που εισέρχονται (=0 αφού όλοι θα κέρδιζαν).

Στη δεύτερη τώρα περίπτωση, το κέρδος π.χ. και πάλι του 1^{ου} παίκτη θα είναι

$$Y = na(1-p)X - a = \begin{cases} na(1-p) - a & \text{αν } X = 1 \\ -a & \text{αν } X = 0 \end{cases}$$

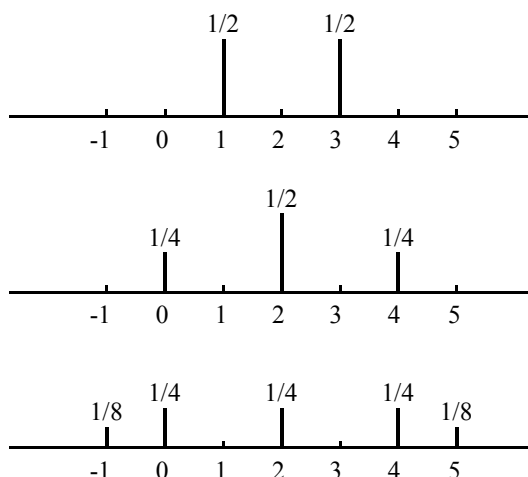
Επομένως,

$$E(Y) = E(na(1-p)X - a) = na(1-p)E(X) - a = na(1-p) \frac{1}{n} - a = -ap$$

Το αναμενόμενο λοιπόν κέρδος κάθε παίκτη θα είναι $-ap$ (<0 άρα πρόκειται για ζημιά). Μακροπρόθεσμα λοιπόν το μέσο κέρδος κάθε παίκτη θα είναι $-ap < 0$. Και αυτό το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο, διότι στο παιχνίδι υπάρχει κάποιος (αυτός που διενεργεί την κλήρωση) που κερδίζει με βεβαιότητα. Επομένως, οι υπόλοιποι παίκτες θα πρέπει μακροπρόθεσμα να χάνουν (αφού θα πρέπει να έχουν το ίδιο μέσο κέρδος).

Διακύμανση ή διασπορά διακριτής τ.μ.

Έστω $a_1, a_2, \dots$ τα σημεία της ευθείας των πραγματικών πάνω στα οποία παίρνει τιμές η τ.μ. X ($X \in \{a_1, a_2, \dots\}$). Αν θεωρήσουμε μάζες μεγέθους $P(X=a_1)$, $P(X=a_2)$, ... πάνω στα σημεία $a_1, a_2, \dots$ αντίστοιχα, τότε, σύμφωνα και με όσα έχουν γραφεί παραπάνω, η μέση τιμή $E(X)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το κέντρο βάρους της συνολικής μάζας (πιθανότητας) που έχει καταταξιωθεί στα σημεία $a_1, a_2, \dots$. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η συνολική πιθανότητα (μάζα) κατά κάποιο τρόπο κατανέμεται «γύρω» από τη μέση τιμή της κατανομής. Υπάρχουν όμως κατανομές που ενώ έχουν ίσες μέσες τιμές, είναι μεταξύ τους αρκετά διαφορετικές. Υπάρχουν π.χ. κατανομές που βρίσκονται «γύρω» και «κοντά» από τη μέση τιμή, ενώ υπάρχουν κατανομές που βρίσκονται «γύρω» αλλά «μακριά» από τη μέση τιμή. Π.χ. βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα διάφορες διακριτές κατανομές με ίδια μέση τιμή (=2).



Παρατηρούμε ότι στην πρώτη περίπτωση η συνολική μάζα (πιθανότητα) βρίσκεται κοντά στη μέση τιμή $\mu = 2$. Στη δεύτερη περίπτωση η μάζα απλώνεται σε μεγαλύτερη απόσταση γύρω από το μ ενώ στην τρίτη περίπτωση η μάζα απλώνεται ακόμη περισσότερο. Θα ήταν λοιπόν αρκετά χρήσιμο αν μπορούσαμε να ποσοτικοποιήσουμε τη «διασπορά» αυτή των τιμών της τ.μ. X γύρω από τη μέση της τιμή ορίζοντας κάποια νέα παράμετρο της κατανομής F_X . Μία αρκετά βολική τέτοια παράμετρος αντιστοιχεί στην «ροπή αδράνειας» γύρω από το κέντρο βάρους της κατανομής της τ.μ. X . Ειδικότερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.2. Έστω X μία διακριτή τ.μ. Η ποσότητα

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] ,$$

καλείται διασπορά (ή διακύμανση) της τ.μ. X (ή της κατανομής της).

Σημειώνουμε ότι η μέση τιμή και η διασπορά μιας τ.μ. X συμβολίζονται συνήθως και με μ_X, σ_X^2 . Επίσης, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η διασπορά ορίζεται όταν $E(X) < \infty$. Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} ,$$

καλείται τυπική απόκλιση της τ.μ. X (ή της κατανομής της). Αν η τ.μ. X παίρνει τιμές στο $\{a_1, a_2, \dots\}$ τότε από την Πρόταση 3.1. προκύπτει ότι

$$V(X) = E((X - \mu_X)^2) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - \mu_X)^2 f_X(a_i) \quad (= \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mu_X)^2 f_X(x)) .$$

Αν η τ.μ. παίρνει τιμές στο $\{0, 1, 2, \dots\}$ τότε προφανώς,

$$V(X) = \sum_{x=0}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) .$$

Άσκηση 3.5. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά των 3 κατανομών που εμφανίζονται στο παραπάνω γράφημα.

Λύση. α) Η συνάρτηση πιθανότητας στην πρώτη περίπτωση είναι

$$P(X=1) = \frac{1}{2}, P(X=3) = \frac{1}{2}$$

και επομένως

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) = 1P(X=1) + 3P(X=3) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E((X - 2)^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - 2)^2 P(X=x)$$

$$= (1-2)^2 P(X=1) + (3-2)^2 P(X=3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

β) Η συνάρτηση πιθανότητας στη δεύτερη περίπτωση είναι

$$P(X=0) = \frac{1}{4}, P(X=2) = \frac{1}{2}, P(X=4) = \frac{1}{4}$$

και επομένως

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) = 0P(X=0) + 2P(X=2) + 4P(X=4) = 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} = 2$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) = E((X - 2)^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - 2)^2 P(X=x) \\ &= (0 - 2)^2 P(X=0) + (2 - 2)^2 P(X=2) + (4 - 2)^2 P(X=4) = 4\frac{1}{4} + 0 + 4\frac{1}{4} = 2 \end{aligned}$$

γ) Η συνάρτηση πιθανότητας στην τρίτη περίπτωση είναι

$$P(X=-1) = \frac{1}{8}, P(X=0) = \frac{1}{4}, P(X=2) = \frac{1}{4}, P(X=4) = \frac{1}{4}, P(X=5) = \frac{1}{8}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) = -1P(X=-1) + 0P(X=0) + 2P(X=2) + 4P(X=4) + 5P(X=5) \\ &= -1\frac{1}{8} + 0\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{4} + 5\frac{1}{8} = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) = E((X - 2)^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - 2)^2 P(X=x) \\ &= 3^2 P(X=-1) + 2^2 P(X=0) + 0^2 P(X=2) + 2^2 P(X=4) + 3^2 P(X=5) \\ &= 3^2 \frac{1}{8} + 2^2 \frac{1}{4} + 0^2 \frac{1}{4} + 2^2 \frac{1}{4} + 3^2 \frac{1}{8} = \frac{9}{8} + \frac{8}{8} + \frac{8}{8} + \frac{9}{8} = 4.25. \end{aligned}$$

Μερικές φορές ο τύπος του ορισμού της διασποράς δεν είναι αρκετά εύχρηστος και για αυτό είναι προτιμότερος ο υπολογισμός της διασποράς μέσω του τύπου που δίνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3. Η διασπορά μιας τ.μ. X είναι ίση με

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της διασποράς και την Πρόταση 3.2. θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - \mu)^2) = E(X^2 + \mu^2 - 2X\mu) = E(X^2) + E(\mu^2) - E(2X\mu) \\ &= E(X^2) + \mu^2 - 2\mu E(X) = E(X^2) + \mu^2 - 2\mu^2 = E(X^2) - \mu^2, \end{aligned}$$

όπου φυσικά, $\mu = E(X)$.

Παρατηρούμε ότι, μέσω της παραπάνω πρότασης, αρκεί να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $E(X)$ και την $E(X^2)$ η οποία καλείται και (μη-κεντρική) *ροπή δεύτερης τάξης* της κατανομής της τ.μ. X . Η $V(X) = E((X - \mu)^2)$ αντίστοιχα καλείται *κεντρική ροπή δευτέρας τάξης* διότι, όπως αναφέραμε και παραπάνω, αντιστοιχεί στην ροπή αδρανείας γύρω από το μέσο μ . Γενικότερα, η $E(X^k)$ καλείται (μη-κεντρική) *ροπή k -τάξης* ή *k -οστή ροπή* της κατανομής της τ.μ. X .

Άσκηση 3.6. α) Να βρεθεί η διασπορά των κατανομών που περιγράφονται από τους επόμενους πίνακες (συναρτήσεις πιθανότητας)

i)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.5	0.1	0.3	0.1

ii)

x	2	4	6	8
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

β) Ποιά είναι η διασπορά των τυχαίων μεταβλητών X^2 , $5X+3$, $\sqrt{X}$ στις προηγούμενες περιπτώσεις;

Λύση. i) Από την Άσκηση 3.3 βρήκαμε ότι

$$E(X) = 1, \quad E(X^2) = 2.2, \quad E(5X+3) = 8, \quad E(\sqrt{X}) \approx 0.697$$

α) Από την Πρόταση 3.3. γνωρίζουμε ότι η διασπορά της τ.μ. X θα είναι

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της άσκησης 3.4. προκύπτει άμεσα ότι

$$V(X) = 2.2 - (1)^2 = 1.2$$

β) Για τη διασπορά της τ.μ. $Y = X^2$ θα είναι

$$V(X^2) = V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(X^4) - E(X^2)^2$$

Από την Πρόταση 3.1. θα είναι

$$E(X^4) = \sum_{i=0}^3 i^4 P(X=i) = 0^4 \cdot 0.5 + 1^4 \cdot 0.1 + 2^4 \cdot 0.3 + 3^4 \cdot 0.1 = 13$$

και άρα

$$V(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2 = 13 - 2.2^2 = 8.16$$

- Για τη διασπορά της τ.μ. $Z = 5X+3$ θα είναι

$$V(5X+3) = V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = E((5X+3)^2) - E(5X+3)^2$$

Από την Πρόταση 3.1. θα είναι

$$E((5X+3)^2) = \sum_{i=0}^3 (5i+3)^2 P(X=i) = 3^2 \cdot 0.5 + 8^2 \cdot 0.1 + 13^2 \cdot 0.3 + 18^2 \cdot 0.1 = 94$$

και άρα

$$V(5X+3) = E((5X+3)^2) - E(5X+3)^2 = 94 - 8^2 = 30$$

- Για τη διασπορά της τ.μ. $W = \sqrt{X}$ θα είναι

$$V(\sqrt{X}) = V(W) = E(W^2) - E(W)^2 = E((\sqrt{X})^2) - E(\sqrt{X})^2 = E(X) - E(\sqrt{X})^2$$

και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της άσκησης 3.4. προκύπτει άμεσα ότι

$$V(\sqrt{X}) = E(X) - E(\sqrt{X})^2 = 1 - 0.697^2 = 0.514$$

ii) Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο εργαζόμαστε και για την κατανομή που περιγράφεται από τον πίνακα (ii).

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις ιδιότητες της διακύμανσης μιας τ.μ.

Πρόταση 3.4. Αν X είναι μία διακριτή τ.μ., $a, b \in R$, τότε

$$1) V(a) = 0,$$

$$2) V(aX+b) = a^2 V(X).$$

Απόδειξη. 1) Αν $X = a$, δηλαδή $P(X=a) = 1$, τότε

$$V(a) = E(a^2) - E(a)^2 = a^2 - a^2 = 0.$$

2) Από την Πρόταση 3.3 και την Πρόταση 3.2 θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E((aX + b)^2) - E(aX + b)^2 = E(a^2 X^2 + b^2 + 2abX) - (aE(X) + b)^2. \\ &= E(a^2 X^2) + E(b^2) + E(2abX) - (a^2 E(X)^2 + b^2 + 2abE(X)) \\ &= a^2 E(X^2) + b^2 + 2abE(X) - a^2 E(X)^2 - b^2 - 2abE(X) \\ &= a^2 (E(X^2) - E(X)^2) = a^2 V(X). \end{aligned}$$

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι $V(X+b) = V(X)$. Αυτό ήταν αναμενόμενο διαισθητικά διότι αν μετακινήσουμε την συνολική πιθανότητα της X κατά b (δηλ. πάρουμε την κατανομή της $X+b$), η διασπορά της θα παραμείνει η ίδια με την αρχική (της X).

Παράδειγμα 3.2 Στην Άσκηση 3.6. ζητήθηκε ο υπολογισμός της διασποράς $V(5X + 3)$ όπου η τ.μ. X έχει σ.π. f που δίνεται από τον πίνακα

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.5	0.1	0.3	0.1

Παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος υπολογισμός μπορεί να γίνει ευκολότερα αν χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.4. Ειδικότερα θα έχουμε ότι,

$$V(5X + 3) = 5^2 V(X)$$

και επειδή (από την Άσκ. 3.6.) $V(X) = 1.2$, προκύπτει άμεσα ότι $V(5X + 3) = 25 \cdot 1.2 = 30$. Το αποτέλεσμα αυτό, όπως ήταν αναμενόμενο, συμπίπτει με αυτό που βρήκαμε (χωρίς τη χρήση της Πρότασης 3.4) στην Άσκηση 3.6.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχών τυχαίων μεταβλητών (κατανομών)

Στις προηγούμενες παραγράφους που αφορούσαν διακριτές τ.μ. (ή ισοδύναμα διακριτές κατανομές) εισαγάγαμε δύο παραμέτρους που προσφέρουν σημαντική πληροφορία για τη μορφή μιας διακριτής κατανομής. Ειδικότερα, η μέση τιμή προσδιορίζει το «βαρύκεντρο» της κατανομής (η τ.μ. παίρνει τιμές «γύρω» από αυτήν) ενώ η διακύμανση εκφράζει τη «μεταβλητότητα» της τ.μ. γύρω από τη μέση τιμή. Είναι εύλογο να αναζητήσουμε ανάλογες παραμέτρους και για τις συνεχείς κατανομές. Όπως θα δούμε αναλυτικότερα στη συνέχεια, η θεωρία που αντιστοιχεί στις συνεχείς τ.μ. είναι ανάλογη με τη θεωρία που αφορά διακριτές τ.μ. Η διαφορά είναι ότι, όπου στις διακριτές κατανομές εμφανίζεται άθροισμα, στις συνεχείς κατανομές εμφανίζεται ολοκλήρωμα.

Ορισμός 3.3. (Μέση τιμή συνεχούς τ.μ.). Έστω X μία συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X . Η ποσότητα

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

(υπό τον όρο ότι $\int |x| f_X(x) < \infty$) θα καλείται μέση ή αναμενόμενη τιμή ή πληθυσμιακός μέσος της τ.μ. X .

Ο παραπάνω ορισμός της μέσης τιμής συμπίπτει και πάλι με τον ορισμό του κέντρου βάρους μιας μάζας (πιθανότητας) κατανεμημένης στον άξονα των πραγματικών με πυκνότητα στο σημείο x ίση με $f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Υπενθυμίζεται ότι ο νόμος των μεγάλων αριθμών (βλ. παρατήρηση 3.1) εξακολουθεί να ισχύει και για συνεχείς τ.μ. Έτσι, αν X_i είναι η (συνεχής) τ.μ. που εκφράζει

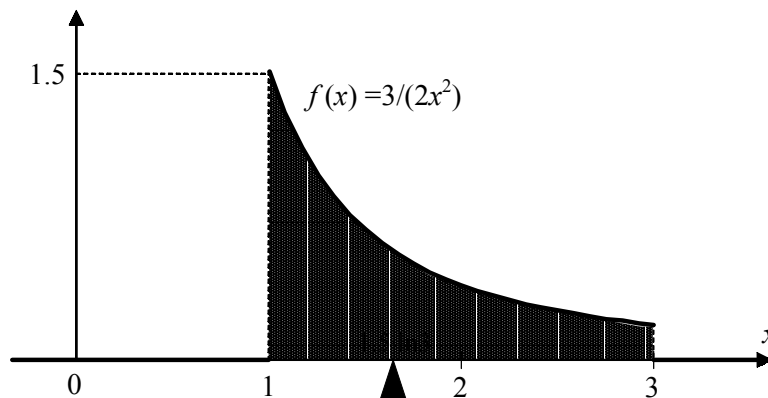
το αποτέλεσμα του i -πειράματος σε μία ακολουθία n όμοιων και ανεξάρτητων πειραμάτων, τότε ο δειγματικός μέσος $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ συγκλίνει (με πιθανότητα 1 όταν $n \rightarrow \infty$) στον πληθυσμιακό μέσο $E(X)$.

Άσκηση 3.7. Να βρεθούν οι μέσες τιμές των τ.μ. X, Y, Z με αντίστοιχες σ.π.π.

$$\alpha) f(x) = \frac{3}{2x^2}, x \in [1,3], \quad \beta) f(x) = 2x, x \in [0,1], \quad \gamma) f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0.$$

Λύση. α) Σύμφωνα με τον ορισμό 3.3. θα είναι

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^3 x \frac{3}{2x^2} dx = \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{3}{2} (\ln x)_1^3 = \frac{3}{2} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{3}{2} \ln 3 \approx 1.65.$$

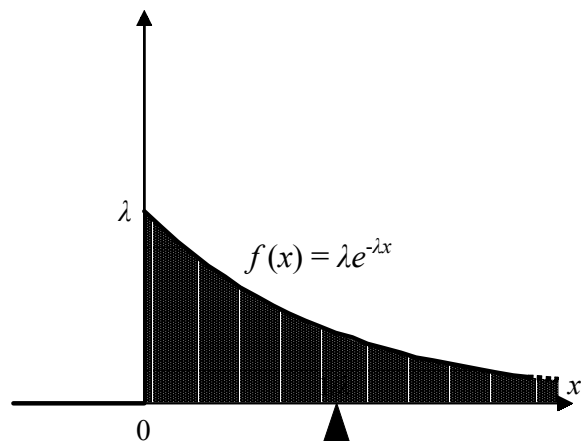
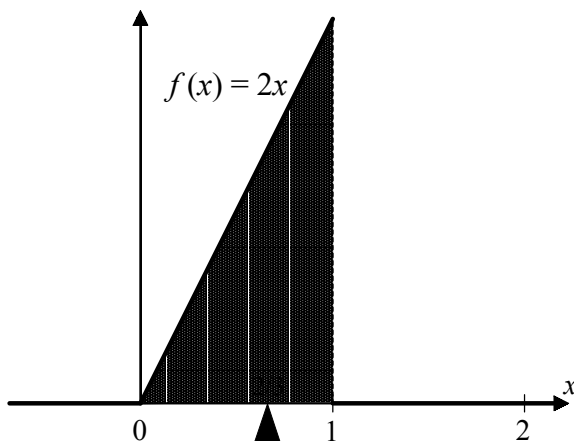


β) Όμοια,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{2}{3}.$$

γ) Θα ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right)' dx = \lambda \left(x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right)_0^{\infty} - \lambda \int_0^{\infty} (x)' \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx = \\ &= \int_0^{\infty} (x)' e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right)_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$



Όπως και στις διακριτές τ.μ., σε αρκετές περιπτώσεις ζητείται ο υπολογισμός της μέσης τιμής μιας τ.μ. $Y = g(X)$ ενώ είναι γνωστή η κατανομή της συνεχούς τ.μ. X . Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε και πάλι, μέσω της μεθόδου που αναπτύχθηκε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου, να βρούμε την κατανομή της νέας τ.μ. Y και στη συνέχεια να υπολογίσουμε την $E(Y)$. Όπως όμως ακριβώς είχαμε παρατηρήσει και στη διακριτή περίπτωση (βλ. Πρόταση 3.1), είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την επόμενη πρόταση (η οποία δίνεται χωρίς απόδειξη).

Πρόταση 3.5. Αν $Y = g(X)$ και X είναι μία συνεχής τ.μ. με σ.π.π. f_X τότε

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

Επίσης, η μέση τιμή συνεχών τ.μ. έχει τις ίδιες ιδιότητες με αυτές της μέσης τιμής διακριτών τ.μ.

Πρόταση 3.6. Αν X είναι μία συνεχής τ.μ., $a, b \in \mathbb{R}$ και g_1, g_2 δύο πραγματικές συναρτήσεις, τότε

- 1) $E(aX + b) = aE(X) + b$
- 2) $E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)).$

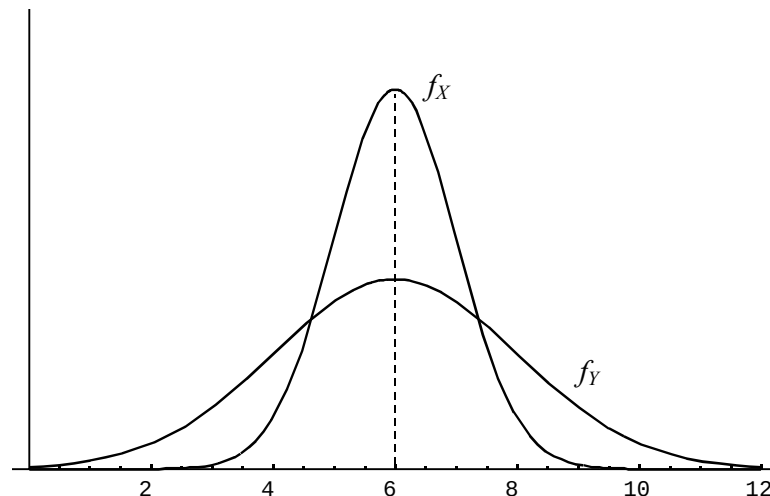
Απόδειξη. 1) Από την Πρόταση 3.5. θα ισχύει ότι

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f_X(x)dx = a \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = aE(X) + b.$$

2) Όμοια με τη διακριτή περίπτωση, θα είναι

$$\begin{aligned} E(g_1(X) + g_2(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g_1(x) + g_2(x))f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)f_X(x)dx \\ &= E(g_1(X)) + E(g_2(X)). \end{aligned}$$

Όπως ακριβώς και στη διακριτή περίπτωση, η μέση τιμή $E(X)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής μπορεί να θεωρηθεί ως το κέντρο βάρους της συνολικής μάζας (πιθανότητας) που έχει κατανεμηθεί στο $\mathbb{R}$ (μέσω της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας). Η συνολική λοιπόν πιθανότητα (μάζα) κατανέμεται «γύρω» από τη μέση τιμή της συνεχούς κατανομής. Όπως είναι φυσικό, και στη συνεχή περίπτωση υπάρχουν κατανομές που ενώ έχουν ίσες μέσες τιμές είναι μεταξύ τους αρκετά διαφορετικές. Π.χ. βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα δύο σ.π.π. f_X, f_Y συνεχών κατανομών με ίδια μέση τιμή ($=6$).



Στην περίπτωση της κατανομής με σ.π.π. f_X η συνολική μάζα (πιθανότητα) βρίσκεται κοντά στη μέση τιμή $\mu=6$ ενώ στην περίπτωση της f_Y η μάζα απλώνεται σε μεγαλύτερη απόσταση γύρω από

το μ . Η ποσοτικοποίηση της «διασποράς» αυτής των τιμών μιας τ.μ. γύρω από τη μέση της τιμή πραγματοποιείται μέσω του επόμενου ορισμού που είναι ακριβώς ίδιος με τη διακριτή περίπτωση

Ορισμός 3.4. Έστω X μία συνεχής τ.μ. Η ποσότητα

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

καλείται διασπορά (ή διακύμανση) της τ.μ. X (ή της κατανομής της).

Η διασπορά αντιστοιχεί και πάλι στην «ροπή αδράνειας» γύρω από το κέντρο βάρους της κατανομής της τ.μ. X . Η μέση τιμή και η διασπορά μιας τ.μ. X συμβολίζονται συνήθως και με μ_X, σ_X^2 . Επίσης, όπως και στη διακριτή περίπτωση, η διασπορά ορίζεται όταν $E(X) < \infty$. Αντίστοιχα με τη διακριτή περίπτωση, η $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ καλείται τυπική απόκλιση της τ.μ. X (ή της κατανομής της). Από την Πρόταση 3.3. προκύπτει ότι

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx$$

Ανάλογα με τη διακριτή περίπτωση ισχύει ο παρακάτω τύπος.

Πρόταση 3.7. Ισχύει ότι

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Απόδειξη. Είναι ακριβώς ίδια με αυτή που αφορά διακριτές τ.μ. (Πρόταση 3.3.)

Σημειώνεται επίσης ότι η $E(X^k)$ καλείται (μη-κεντρική) ροπή k -τάξης ή k -οστή ροπή της κατανομής της τ.μ. X . Η επόμενη πρόταση είναι ίδια με την 3.4. που αφορούσε διακριτές τ.μ.

Πρόταση 3.8. Αν X είναι μία συνεχής τ.μ., $a, b \in R$, τότε

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Απόδειξη. Είναι ακριβώς ίδια με αυτή που αφορά διακριτές τ.μ. (Πρόταση 3.4.)

Άσκηση 3.8. Να βρεθούν οι διασπορές και οι τυπικές αποκλίσεις των τ.μ. X, Y, Z με αντίστοιχες σ.π.π.

$$\alpha) f(x) = \frac{3}{2x^2}, x \in [1, 3], \quad \beta) f(x) = 2x, x \in [0, 1], \quad \gamma) f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0$$

Λύση. α) Από την Άσκηση 3.7. βρέθηκε ότι

$$E(X) = \frac{3}{2} \ln 3.$$

Βασίζόμενοι στην Πρόταση 3.7. για τον υπολογισμό της $V(X)$ αρκεί να υπολογίσουμε την $E(X^2)$. Θα είναι

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^3 x^2 \frac{3}{2x^2} dx = \frac{3}{2} \int_1^3 dx = \frac{3}{2} 2 = 3$$

και άρα

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \frac{9}{4} (\ln 3)^2 \approx 0.284, \quad \sigma_X = \sqrt{V(X)} \approx 0.5329$$

β) Από την Άσκηση 3.7. βρέθηκε ότι

$$E(X) = \frac{2}{3}.$$

Απομένει να υπολογίσουμε την

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 2x dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \left(\frac{x^4}{4} \right)_0^1 = \frac{1}{2}$$

και άρα

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9}{18} - \frac{8}{18} = \frac{1}{18}, \quad \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\sqrt{18}}$$

γ) Και πάλι από την Άσκηση 3.7. βρέθηκε ότι

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x^2 \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right)' dx = \lambda \left(x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right)_0^{\infty} - \lambda \int_0^{\infty} (x^2)' \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx = \\ &= \int_0^{\infty} (x^2)' e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

και τελικά,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Τυποποιημένες κατανομές

Κάθε τ.μ. η οποία έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1 καλείται τυπική κατανομή. Είναι ενδιαφέρον η παρατήρηση ότι κάθε τ.μ. X μπορεί να μετασχηματισθεί έτσι ώστε να είναι τυπική. Συγκεκριμένα, η μετασχηματισμένη τ.μ.

$$Y = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

παρατηρούμε ότι έχει

$$E(Y) = E\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}\right) = 0, \quad V(Y) = \left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_x^2} V(X) = 1$$

και επομένως είναι τυπική. Για το λόγο αυτό η τ.μ.

$$\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

καλείται και τυποποιημένη τ.μ.