
2. Τυχαίες Μεταβλητές.

Είναι αρκετά συνήθης η περίπτωση όπου κατά τη μελέτη ενός τυχαίου πειράματος, ενδιαφερόμαστε κυρίως για κάποια συνάρτηση του αποτελέσματος και όχι για το αποτέλεσμα αυτό καθαυτό. Για παράδειγμα, έστω ότι μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το πλήθος X των ελαττωματικών αντικειμένων που εξέρχονται από μία παραγωγική διαδικασία. Κατά τον ποιοτικό έλεγχο, π.χ. n αντικειμένων, κάθε ένα από αυτά χαρακτηρίζεται ως ελαττωματικό ή μη-ελαττωματικό. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αυτού μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από όλες τις n -άδες της μορφής $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου $x_i = 0$ ή 1 ανάλογα με το αν το i -αντικείμενο είναι ελαττωματικό ή όχι. Συνεπώς, ο Ω αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 2 στοιχείων $\{0, 1\}$ ανά n με επανάληψη και άρα $|\Omega| = 2^n$. Αυτό που μας ενδιαφέρει όμως να γνωρίζουμε δεν είναι το ακριβές αποτέλεσμα του στοχαστικού αυτού πειράματος, δηλαδή ποιες ακριβώς μονάδες είναι ελαττωματικές και ποιες όχι, αλλά πόσες είναι ελαττωματικές από τις n . Σε κάθε λοιπόν στοιχειώδες ενδεχόμενο ω του Ω αντιστοιχούμε μία μεταβλητή $X(\omega)$ η οποία εκφράζει το πλήθος των ελαττωματικών αντικειμένων που θα μετρήσουμε αν πραγματοποιηθεί το συγκεκριμένο στοιχειώδες ενδεχόμενο. π.χ. αν $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$ είναι ένα στοιχειώδες ενδεχόμενο (ελαττωματικό το 3^ο, 5^ο και 6^ο αντικείμενο με $n=7$), τότε ο αριθμός των ελαττωματικών που του αντιστοιχεί είναι 3. Αυτό που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε είναι η πιθανότητα να καταγραφούν π.χ. 5 ελαττωματικά αντικείμενα, ή π.χ. λιγότερα από 3 ελαττωματικά κ.ο.κ. Στο κεφάλαιο λοιπόν αυτό θα μελετήσουμε μεταβλητές των οποίων η τιμή καθορίζεται από το αποτέλεσμα κάποιου στοχαστικού πειράματος. Για το λόγο αυτό οι μεταβλητές αυτές καλούνται *τυχαίες μεταβλητές*. Αυστηρότερα, θα έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.1. Κάθε απεικόνιση X από το δειγματικό χώρο Ω σε κάποιο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών R θα καλείται **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)**.

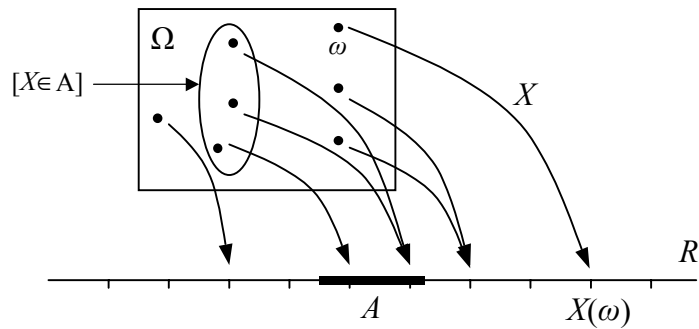
Ως τ.μ. μπορούν π.χ. να θεωρηθούν:

- Το πλήθος των επιτυχιών σε μία ακολουθία δοκιμών με δύο δυνατά αποτελέσματα (επιτ.-απότ.)
- το ύψος ή το βάρος ή ο χρόνος ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου ανθρώπου,
- η τιμή ενός προϊόντος η μίας μετοχής σε κάποια δεδομένη στιγμή στο μέλλον,
- το πλήθος των πελατών ενός καταστήματος μία συγκεκριμένη ημέρα στο μέλλον,
- ο χρόνος ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου εξαρτήματος (π.χ. ενός λαμπτήρα),
- το ύψος της αποζημίωσης που καλείται να πληρώσει μια ασφαλιστική εταιρία (σε κάποιον ασφαλισμένο της που έχει υποστεί κάποια ζημιά).

κ.ο.κ.

Παρατηρούμε ότι, μία τ.μ. $X: \Omega \rightarrow R$ απεικονίζει κάθε στοιχείο ω του Ω στο $X(\omega) \in R$. Ως σύνολο ή πεδίο των τιμών της τ.μ. X θα καλείται το σύνολο $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\} \subseteq R$.

Στη συνέχεια θα γράφουμε $[X=x]$ ή $[X \leq x]$ ή γενικότερα $[X \in A]$ για $A \subseteq R$ εννοώντας τα ενδεχόμενα $\{\omega \in \Omega: X(\omega)=x\}$, $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\}$ και $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A\}$ αντίστοιχα. Συνεπώς, θα γράφουμε $P([X \in A])$ ή απλούστερα $P(X \in A)$ εννοώντας την πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A\} \subseteq \Omega$. Επίσης, αν X, Y είναι δύο τ.μ. τότε με $P(X \in A, Y \in B)$ θα συμβολίζουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $[X \in A] \cap [Y \in B] = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A\} \cap \{\omega \in \Omega: Y(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B\} \equiv [X \in A, Y \in B]$.



Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής, ας δούμε αναλυτικά κάποια απλά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.1. Έστω το στοχαστικό πείραμα της ρίψης δύο ζαριών. Ως αποτέλεσμα, μας ενδιαφέρει το άθροισμα των δύο ζαριών. Ας συμβολίσουμε με X το άθροισμα των ενδείξεων των δύο αυτών ζαριών. Δηλαδή, σε κάθε δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος (στοιχειώδες ενδεχόμενο) αντιστοιχούμε έναν αριθμό X που εκφράζει το άθροισμα των δύο ζαριών. Συγκεκριμένα θα έχουμε την ακόλουθη απεικόνιση όπου κάθε στοιχείο ω του Ω (διατάξεις των 6 ανά δύο με επανάληψη) απεικονίζεται στο $X(\omega)$:

Στοιχειώδες ενδεχόμενο

ω	$X(\omega)$	ω	$X(\omega)$	ω	$X(\omega)$	ω	$X(\omega)$	ω	$X(\omega)$	ω	$X(\omega)$
(1,1)	2	(2,1)	3	(3,1)	4	(4,1)	5	(5,1)	6	(6,1)	7
(1,2)	3	(2,2)	4	(3,2)	5	(4,2)	6	(5,2)	7	(6,2)	8
(1,3)	4	(2,3)	5	(3,3)	6	(4,3)	7	(5,3)	8	(6,3)	9
(1,4)	5	(2,4)	6	(3,4)	7	(4,4)	8	(5,4)	9	(6,4)	10
(1,5)	6	(2,5)	7	(3,5)	8	(4,5)	9	(5,5)	10	(6,5)	11
(1,6)	7	(2,6)	8	(3,6)	9	(4,6)	10	(5,6)	11	(6,6)	12

Το σύνολο τιμών $X(\Omega)$ της τ.μ. X θα είναι το $\{2,3,\dots,12\}$. Θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 P(X=2) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=2\}) = P(\{(1,1)\}) = 1/36, \\
 P(X=3) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=3\}) = P(\{(1,2), (2,1)\}) = 2/36, \\
 P(X=4) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=4\}) = P(\{(1,3), (2,2), (3,1)\}) = 3/36, \\
 P(X=5) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=5\}) = P(\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}) = 4/36, \\
 P(X=6) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=6\}) = P(\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}) = 5/36, \\
 P(X=7) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=7\}) = P(\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}) = 6/36, \\
 P(X=8) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=8\}) = P(\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}) = 5/36, \\
 P(X=9) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=9\}) = P(\{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}) = 4/36, \\
 P(X=10) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=10\}) = P(\{(4,6), (5,5), (6,4)\}) = 3/36, \\
 P(X=11) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=11\}) = P(\{(5,6), (6,5)\}) = 2/36, \\
 P(X=12) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=12\}) = P(\{(6,6)\}) = 1/36,
 \end{aligned}$$

ή συνοπτικά,

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{x-1}{36}, & x=2,\dots,7 \\ \frac{13-x}{36}, & x=8,9,\dots,12 \end{cases} = \frac{6-|7-x|}{36}, x=2,3,\dots,12.$$

Επειδή η τυχαία μεταβλητή X θα πάρει οπωσδήποτε κάποια από τις τιμές $2,3,\dots,12$, θα ισχύει ότι $P(\bigcup_{x=2}^{12} [X=x]) = P(\Omega) = 1$. Εναλλακτικά, μπορούμε να επαληθεύσουμε το συγκεκριμένο διαπιστώνοντας ότι

$$P\left(\bigcup_{x=2}^{12}[X=x]\right) = \sum_{i=1}^{12} P(X=x) = \sum_{i=1}^{12} \frac{6-|7-x|}{36} = 1.$$

Παράδειγμα. 2.2. Έστω ότι μία οικογένεια έχει τρία παιδιά. Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή X η οποία εκφράζει τον αριθμό των αγοριών. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος (γέννηση τριών παιδιών και καταγραφή των φύλων τους) θα είναι

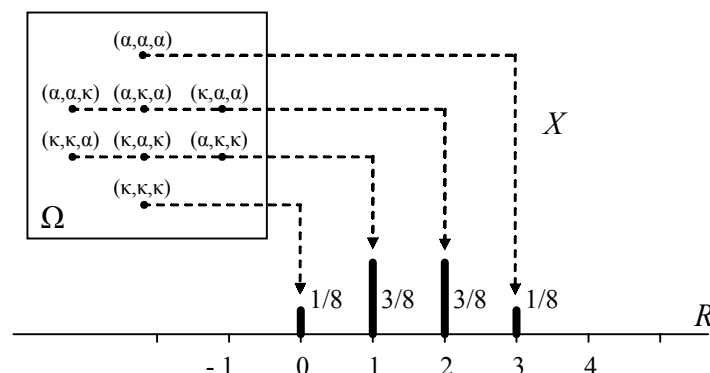
$$\Omega = \{(a,a,a), (a,a,k), (a,k,a), (k,a,a), (a,k,k), (k,a,k), (k,k,a), (k,k,k)\}$$

Ας θεωρήσουμε για απλότητα ότι τα 8 στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα (βλ. Άσκ. 1.22). Θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=0\}) = P(\{(k,k,k)\}) = 1/8, \\ P(X=1) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=1\}) = P(\{(a,k,k), (k,a,k), (k,k,a)\}) = 3/8, \\ P(X=2) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=2\}) = P(\{(a,a,k), (a,k,a), (k,a,a)\}) = 3/8, \\ P(X=3) &= P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=3\}) = P(\{(a,a,a)\}) = 1/8. \end{aligned}$$

Το σύνολο τιμών της X σε αυτή την περίπτωση θα είναι το $\{0,1,2,3\}$. Επαληθεύουμε φυσικά ότι $P([X=0] \cup [X=1] \cup [X=2] \cup [X=3]) = P(\Omega) = 1$.

Στα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι εμφανίζονται πιθανότητες της μορφής $P(X=x)$ οι οποίες αντιστοιχίζουν σε κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της X μία πιθανότητα $P(X=x)$ (η οποία «προέρχεται» από τον Ω). Με άλλα λόγια, η συνολική πιθανότητα (1 ή 100%) «κατανέμεται» στα στοιχεία του συνόλου τιμών της τ.μ. X μέσω της συνάρτησης $f(x) = P(X=x)$. Στο Παράδειγμα 2.2, η συνολική πιθανότητα (1 ή 100%) του Ω «κατανεμήθηκε» σε τέσσερα σημεία του R , τα σημεία 0,1,2,3 (κατανεμήθηκαν πιθανότητες 1/8, 3/8, 3/8, 1/8 αντίστοιχα) όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Στις εφαρμογές, συνήθως δεν μας ενδιαφέρει από ποια στοιχεία του Ω έχει προέλθει η πιθανότητα που έχει κατανεμηθεί στα διάφορα σημεία του R , αλλά μόνο η «κατανομή» της πιθανότητας στον R . Για παράδειγμα, συνήθως δεν μας ενδιαφέρει ότι η πιθανότητα 3/8 στο σημείο 1 έχει προέλθει από τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\omega_1 = (a,k,k)$, $\omega_2 = (k,a,k)$, $\omega_3 = (k,k,a)$, αλλά μόνο το γεγονός ότι στα σημεία 0,1,2,3 έχει κατανεμηθεί πιθανότητα 1/8, 3/8, 3/8 και 1/8 αντίστοιχα. Επομένως, μας αρκεί να βρούμε ένα τρόπο να περιγράψουμε την «κατανομή» αυτή της συνολικής πιθανότητας στον R . Μία πρώτη σκέψη είναι να χρησιμοποιήσουμε για το σκοπό αυτό την συνάρτηση $f(x) = P(X=x)$ η οποία μας δείχνει πόση πιθανότητα έχει κατανεμηθεί σε κάθε x . Δυστυχώς όμως υπάρχουν περιπτώσεις τυχαίων μεταβλητών όπου η συνάρτηση αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί (π.χ. για τις συνεχείς τ.μ. που θα εξετάσουμε παρακάτω). Αντί της συνάρτησης $f(x) = P(X=x)$ λοιπόν, έχει επικρατήσει η χρήση της $F(x) = P(X \leq x)$ για την περιγραφή της «κατανομής» της τ.μ. X . Η συνάρτηση αυτή, αντίθετα από την $f(x) = P(X=x)$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε τ.μ. X . Ειδικότερα θα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2. Η συνάρτηση $F_X: R \rightarrow [0,1]$ ώστε

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

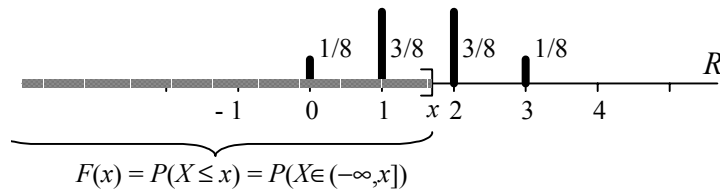
καλείται (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της τ.μ. X .

Για παράδειγμα, ας δούμε ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X του Παραδ. 2.2.

Παράδειγμα 2.3. (συνέχεια του 2.2) Η τυχαία μεταβλητή X εκφράζει τον αριθμό των αγοριών σε μία οικογένεια τριών παιδιών. Βρήκαμε στο παράδειγμα 2.2 ότι

$$P(X=0) = 1/8, \quad P(X=1) = 3/8, \quad P(X=2) = 3/8, \quad P(X=3) = 1/8.$$

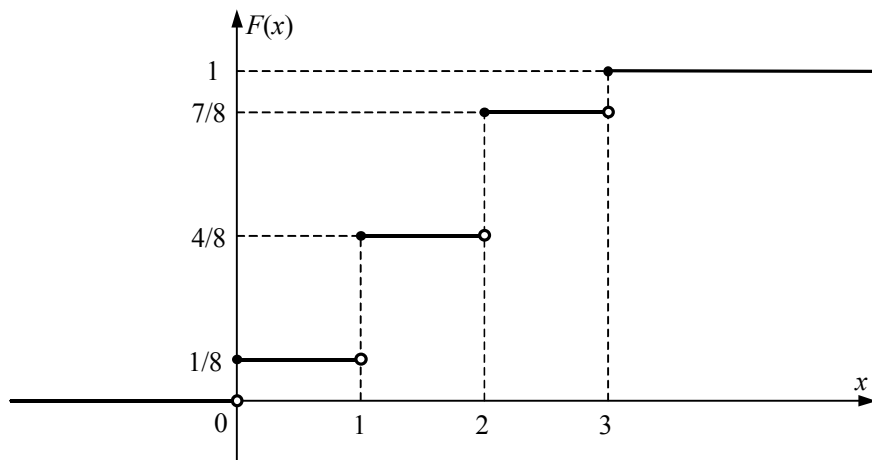
Η $F(x)$ εκφράζει την πιθανότητα που έχει κατανεμηθεί στο σύνολο $(-\infty, x]$.



και συνεπώς θα είναι ίση με

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ P(X=0) = 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ P(X=0) + P(X=1) = 4/8, & 1 \leq x < 2 \\ P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 8/8 = 1, & 3 \leq x \end{cases}$$

Σχηματικά θα έχουμε ότι,



Παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση κατανομής, ανεξάρτητα από ποιά τ.μ. προέρχεται, έχει κάποιες ιδιότητες. Συγκεκριμένα, από τον Ορισμό 2.2 αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.1. Για τη συνάρτηση κατανομής F μιας τ.μ. ισχύουν τα εξής:

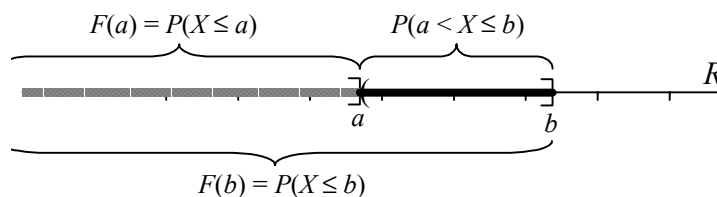
- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$,
- 3) Η F είναι μη φθίνουσα συνάρτηση, δηλαδή για κάθε $x > y$ ισχύει ότι $F(x) \geq F(y)$.
- 4) Η F είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$.

Η (1) είναι προφανής διότι η F εκφράζει μια πιθανότητα και άρα θα παίρνει τιμές στο $[0,1]$. Η (2) μπορεί διαισθητικά (και όχι αυστηρά) να δικαιολογηθεί παρατηρώντας ότι $F(\infty) = P(X \leq \infty) = P(\Omega) = 1$, και $F(-\infty) = P(X \leq -\infty) = P(\emptyset) = 0$. Για την (3), παρατηρούμε ότι αν $X \leq y$ τότε και $X \leq x$ (αφού $y < x$) ή με άλλα λόγια $[X \leq y] \subseteq [X \leq x]$ και άρα $F(x) = P(X \leq y) \leq P(X \leq x) = F(y)$ (η απόδειξη της (4), καθώς και η αυστηρή απόδειξη της (2), είναι αρκετά τεχνική και παραλείπεται καθώς ξεφεύγει από τους σκοπούς των σημειώσεων αυτών).

Αποδεικνύεται επίσης ότι αν μία συνάρτηση F ικανοποιεί τις παραπάνω 4 συνθήκες τότε μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής. Διαφορετικές τ.μ. είναι δυνατό να έχουν την ίδια ή και διαφορετική κατανομή. Επίσης, αν X είναι μία τ.μ. και $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ τότε, η πιθανότητα να ισχύει ότι $a < X \leq b$ είναι η πιθανότητα που έχει κατανεμηθεί στο $(a, b]$ που προφανώς είναι ίση με την πιθανότητα που έχει κατανεμηθεί στο $(-\infty, b]$ μείον την πιθανότητα που έχει κατανεμηθεί στο $(-\infty, a]$. Δηλαδή,

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a).$$

Σχηματικά:



Αυτό μπορεί να αποδειχθεί και αυστηρότερα:

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P([X > a] \cap [X \leq b]) = P([X \leq a]^c \cap [X \leq b]) \\ &= P(X \leq b) - P([X \leq a] \cap [X \leq b]) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον γενικό κανόνα $(A^c \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ καθώς και το γεγονός ότι $[X \leq a] \subseteq [X \leq b]$ (επειδή $a < b$). Επομένως, η πιθανότητα η τ.μ. να παίρνει τιμές μεταξύ του a και του b θα είναι $F(b) - F(a)$.

Με σκοπό την καλύτερη μελέτη τους, οι κατανομές τυχαίων μεταβλητών χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Στις διακριτές κατανομές (ή τ.μ.) και στις συνεχείς κατανομές (ή τ.μ.):

- **Διακριτές** καλούνται οι τ.μ. που έχουν ως πεδίο τιμών κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ ή του $\mathbb{N}$ ή γενικότερα παίρνουν αριθμήσιμο πλήθος τιμών (έχουν αριθμήσιμο πεδίο τιμών). Οι αντίστοιχες κατανομές τους θα καλούνται διακριτές κατανομές. Τα παραδείγματα που είδαμε παραπάνω προφανώς αφορούν διακριτές τ.μ. Υπενθυμίζεται ότι αριθμήσιμο καλείται ένα σύνολο A όταν είτε είναι πεπερασμένο (π.χ. $A = \{1, 3, 5\}$), είτε υπάρχει μία απεικόνιση 1-1 και επί μεταξύ του A και του $\mathbb{N}$. Απλούστερα, θα λέμε ότι το A είναι αριθμήσιμο αν μπορεί να γραφεί στη μορφή, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ (π.χ. $\{1, 2, 3, 5\}$) ή $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ (π.χ. $\{0.5, 1, 1.5, 2, \dots\}$ ή $\{3, 6, 9, \dots\}$). Τα σύνολα $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμα ενώ π.χ. ένα διάστημα (α, β) δεν είναι.

- **Συνεχείς** καλούνται οι τ.μ. που έχουν ως πεδίο τιμών ένα διάστημα του $\mathbb{R}$, ή όλο το $\mathbb{R}$ ενώ επιπλέον έχουν παραγωγίσιμες συναρτήσεις κατανομής. Οι αντίστοιχες κατανομές τους θα καλούνται συνεχείς κατανομές. Για παράδειγμα, ο ακριβής χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα ή ενός ανθρώπου, η τιμή ενός προϊόντος κ.ο.κ. μπορούν να θεωρηθούν ως συνεχείς τ.μ.¹

¹ Υπάρχουν κατανομές που δεν είναι ούτε συνεχείς ούτε διακριτές (π.χ. είναι μικτές ή ιδιάζουσες κατανομές). Τέτοιες κατανομές δεν εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές και δεν θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

Είναι φανερό ότι τα παραδείγματα 2.1-2.3 που εξετάσαμε παραπάνω αφορούσαν διακριτές τ.μ. Συγκεκριμένα, στο Παράδειγμα 2.1. η τ.μ. X εκφράζει το άθροισμα δύο ζαριών και παίρνει τιμές στο σύνολο $\{2,3,\dots,12\}$, ενώ στο Παράδειγμα 2.2. η τ.μ. X (την οποία, για να μην υπάρχει σύγχυση, θα μπορούσαμε να είχαμε συμβολίσει π.χ. με Y) εκφράζει το πλήθος των αγοριών σε μία οικογένεια τριών παιδιών και άρα παίρνει τιμές στο $\{0,1,2,3\}$.

Γενικότερα, μία διακριτή τ.μ. παίρνει τιμές σε ένα σύνολο της μορφής $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ (πεπερασμένο) ή $\{a_1, a_2, \dots\}$ (άπειρα αριθμήσιμο). Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, στις περισσότερες περιπτώσεις οι διακριτές τ.μ. παίρνουν τιμές στο $\{0,1,2,\dots,n\}$ (για κάποιο n) ή στο $\{0,1,2,\dots\} = \mathbb{N}$. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η τ.μ. X που εκφράζει το άθροισμα δύο ζαριών στο παράδειγμα 2.1. θα μπορούσε να είχε θεωρηθεί ότι παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0,1,2,\dots,12\}$ θέτοντας ότι $P(X=0) = P(X=1) = 0$. Όπως έχουμε δει, η κατανομή της συνολικής πιθανότητας στα διάφορα σημεία του $\mathbb{R}$ περιγράφεται από την συνάρτηση κατανομής F . Στην περίπτωση όμως των διακριτών τ.μ. είναι μερικές φορές βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε και την λεγόμενη «συνάρτηση πιθανότητας». Ειδικότερα έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.3. Έστω μία διακριτή τ.μ. X με τιμές στο $A = X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f_X: A \rightarrow [0,1]$,

$$f_X(x) = P(X = x), \quad x \in A$$

θα καλείται *συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. X* .

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, αν $B \subseteq A = X(\Omega)$ τότε,

$$P(X \in B) = \sum_{x \in B} P(X = x) = \sum_{x \in B} f_X(x).$$

Αν $B = A = X(\Omega)$ τότε προφανώς,

$$\sum_{x \in A} f_X(x) = P(X \in A) = 1.$$

Δηλαδή, το άθροισμα των τιμών της f_X για όλα τα $x \in X(\Omega)$ είναι ίσο με 1. Επίσης, η f_X παίρνει θετικές τιμές μόνο για $x \in X(\Omega)$, δηλαδή είναι $f_X > 0$ σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αντίστροφα τώρα, αν μία μη-αρνητική συνάρτηση f παίρνει γνήσια θετικές τιμές σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το άθροισμα των τιμών της είναι 1, τότε μπορεί να θεωρηθεί ως η συνάρτηση πιθανότητας μιας (διακριτής) τ.μ.

Σχέση μεταξύ συνάρτησης πιθανότητας και συνάρτησης κατανομής.

Αν γνωρίζουμε την σ.π. τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη σ.κ. και αντίστροφα. Πράγματι, αν $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ είναι το σύνολο τιμών της τ.μ. X ($a_1 < a_2 < \dots$), τότε η σχέση που συνδέει τη συνάρτηση πιθανότητας f_X και τη συνάρτηση κατανομής F_X είναι η εξής

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i: a_i \leq x} P(X = a_i) = \sum_{i: a_i \leq x} f_X(a_i), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για παράδειγμα, αν $X \in \{0,1,2,\dots\}$ ($a_i = i-1$) τότε²

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq [x]) = \sum_{i=0}^{[x]} P(X = i) = \sum_{i=0}^{[x]} f_X(i), \quad x \in \mathbb{R}.$$

² Με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x , δηλαδή το μεγαλύτερο ακέραιο που είναι $\leq x$. (π.χ. $[3.23] = 3$, $[1.92] = 1$, $[-2.43] = -2$, $[5] = 5$ κ.ο.κ.)

Για απλότητα (αλλά και γιατί είναι αρκετό για τις εφαρμογές) στις διακριτές κατανομές, η σ.κ. δίνεται μόνο στα σημεία όπου αλλάζει τιμές (παρουσιάζει «άλματα»). Από τις ιδιότητες της σ.κ. μπορούμε, αν γνωρίζουμε την τιμή της F πάνω στα σημεία που παρουσιάζει άλματα, να βρούμε την τιμή της F σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του $\mathbb{R}$. Επομένως, αν η διακριτή τ.μ. X παίρνει τιμές στο A , η F είναι αρκετό να ορίζεται μόνο στα σημεία $x \in A$.

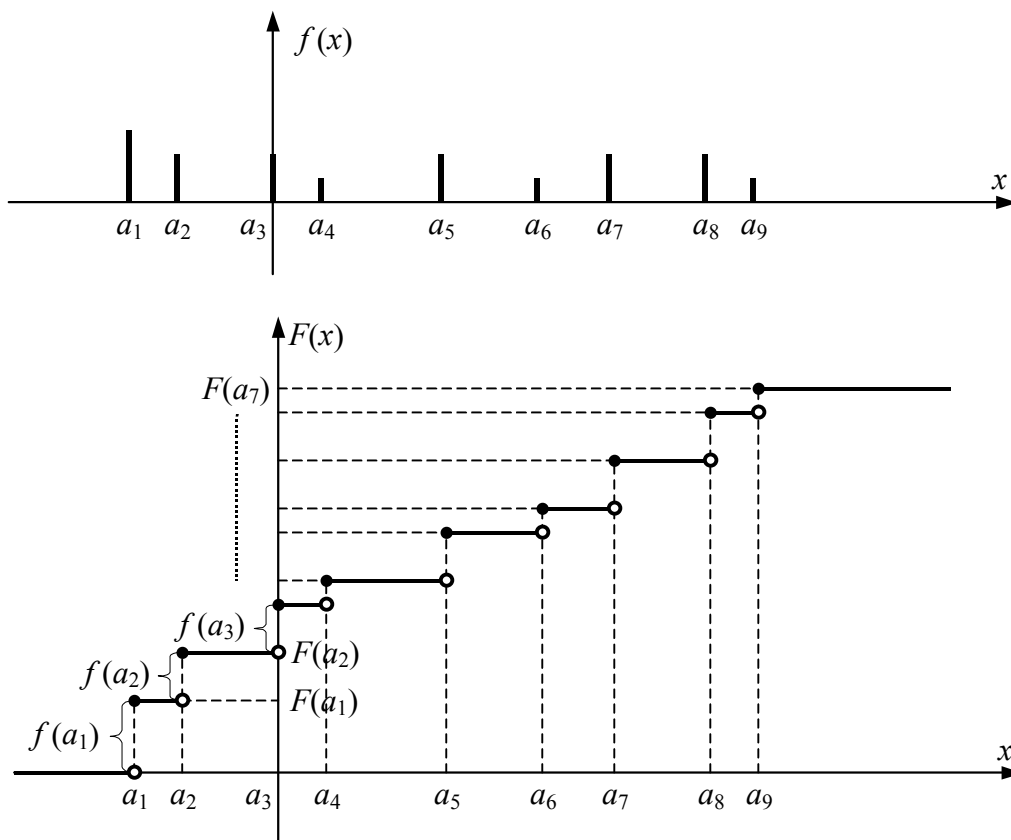
Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι, αν γνωρίζουμε την $f_X(x)$, $x \in A$, τότε μπορούμε να βρούμε και την $F_X(x)$, $x \in A$ ή $x \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα, η συνάρτηση πιθανότητας προκύπτει από τη συνάρτηση κατανομής ως εξής:

$$f_X(a_i) = P(X = a_i) = P(a_{i-1} < X \leq a_i) = F_X(a_i) - F_X(a_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots$$

και $f_X(a_1) = P(X = a_1) = P(X \leq a_1) = F_X(a_1)$. Για παράδειγμα, αν $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$ τότε

$$f_X(i) = P(X = i) = F_X(i) - F_X(i-1), \quad i = 2, 3, \dots, \quad f_X(0) = F_X(0).$$

Γενικά, το γράφημα της συνάρτησης κατανομής $F = F_X$ και της αντίστοιχης συνάρτησης πιθανότητας $f = f_X$ μιας διακριτής τ.μ. X θα είναι της μορφής:



Παρατηρούμε ότι τα σημεία όπου η σ.κ. παρουσιάζει ασυνέχειες («άλματα»), είναι τα σημεία όπου η σ.π. είναι γνήσια θετική (>0). Επομένως, μια διακριτή τ.μ. X παίρνει τιμές (με θετική πιθανότητα) στα σύνολο των σημείων ασυνέχειας της κατανομής της F_X . Τέλος, γνωρίζουμε από τα παραπάνω ότι,

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

και συνεπώς,

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b), \quad P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + f_X(a),$$

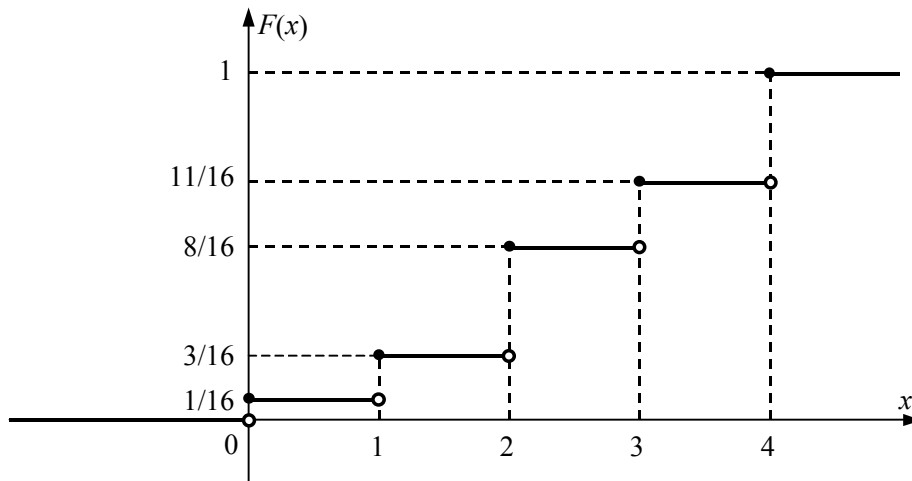
$$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) + f_X(a) - f_X(b).$$

Άσκηση 2.1. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/16, & 0 \leq x < 1 \\ 3/16, & 1 \leq x < 2 \\ 1/2, & 2 \leq x < 3 \\ 11/16, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & 4 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Να παρασταθεί γραφικά η F και να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(1 < X \leq 3)$, $P(X > 2)$, $P(1 \leq X < 4)$ και η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

Λύση. Το γράφημα της F θα είναι της μορφής



Θα είναι,

$$P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = \frac{11}{16} - \frac{3}{16} = \frac{1}{2}, \quad P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{8}{16} = \frac{1}{2},$$

και

$$P(1 \leq X < 4) = P(0 < X \leq 3) = F(3) - F(0) = \frac{11}{16} - \frac{1}{16} = \frac{10}{16}$$

Τέλος, επειδή η τ.μ. X παίρνει τιμές (με θετική πιθανότητα) στα σύνολο των σημείων ασυνέχειας της κατανομής της F_X θα ισχύει ότι $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Επίσης,

$$f_X(0) = P(X = 0) = P(X \leq 0) = F_X(0) = \frac{1}{16},$$

$$f_X(1) = P(X = 1) = F_X(1) - F_X(0) = \frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{2}{16},$$

$$f_X(2) = P(X = 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{8}{16} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16},$$

$$f_X(3) = P(X = 3) = F_X(3) - F_X(2) = \frac{11}{16} - \frac{8}{16} = \frac{3}{16}$$

$$f_X(4) = P(X = 4) = F_X(4) - F_X(3) = 1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}.$$

Άσκηση 2.2. Σε μια τηλεοπτική εκπομπή δίνονται στο διαγωνιζόμενο τα ονόματα 3 χωρών και τα ονόματα 3 πρωτευουσών και ζητείται να κάνει αντιστοίχιση της κάθε πρωτεύουσας στη σωστή χώρα. Αν ο διαγωνιζόμενος κάνει την αντιστοίχιση εντελώς τυχαία, να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής του αριθμού X των σωστών αντιστοιχίσεων.

Λύση. Έστω (A,B,C) τα ονόματα των τριών χωρών και (a,b,c) τα ονόματα των τριών πρωτευουσών. Το σύνολο των δυνατών επιλογών του διαγωνιζόμενου (δυνατά αποτελέσματα του πειράματος) θα είναι το $\Omega = \{(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)\}$ (δυνατές μεταθέσεις 3 στοιχείων), δηλαδή $|\Omega| = 3! = 6$. Π.χ. η επιλογή (a,c,b) υποδηλώνει την αντιστοίχιση $A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow c$. Λόγω του ότι η επιλογή μιας από τις μεταθέσεις του Ω γίνεται τυχαία, θα είναι $P(\{\omega\}) = 1/6$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Έστω X ο αριθμός των σωστών αντιστοιχίσεων. Θα ισχύει ότι $X \in \{0,1,2,3\}$ και

$$f_X(0) = P(X=0) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}) = P(\{(b,c,a), (c,a,b)\}) = \frac{2}{6},$$

$$f_X(1) = P(X=1) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}) = P(\{(a,c,b), (b,a,c), (c,b,a)\}) = \frac{3}{6},$$

$$f_X(2) = P(X=2) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 2\}) = P(\emptyset) = 0,$$

$$f_X(3) = P(X=3) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\}) = P(\{(a,b,c)\}) = \frac{1}{6}.$$

Η συνάρτηση κατανομής (πάνω στο σύνολο τιμών της X) θα είναι

$$F_X(0) = f_X(0) = \frac{2}{6}, F_X(1) = f_X(0) + f_X(1) = \frac{5}{6}, F_X(2) = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = \frac{5}{6}, F_X(3) = 1$$

Παρατηρούμε ότι η τ.μ. X παίρνει τιμές στο $\{0,1,3\}$ με θετική πιθανότητα. Προφανώς, είτε θεωρήσουμε ως πεδίο τιμών της X το $\{0,1,3\}$ είτε το $\{0,1,2,3\}$, η συνάρτηση κατανομής (για όλα τα $x \in \mathbb{R}$) δεν αλλάζει.

Άσκηση 2.3. Σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c , έτσι ώστε οι αντίστοιχοι τύποι να ορίζουν συναρτήσεις πιθανότητας στο σύνολο τιμών R_X .

$$\alpha. f(x) = c(x-5), R_X = \{0,1,2,3,4\} \quad \beta. f(x) = cx, R_X = \{1,2,\dots,v\},$$

$$\gamma. f(x) = c3^{x-1}/4^x, R_X = \{1,2,3,\dots\}$$

Να βρεθούν οι αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής.

Λύση. Για να είναι μία f συνάρτηση πιθανότητας μιας τ.μ. θα πρέπει, σύμφωνα με τα παραπάνω, να είναι μη-αρνητική, να είναι γνήσια θετική (>0) σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ (και 0 στο $\mathbb{R}-A$), και οι τιμές της να έχουν άθροισμα 1.

α) Θα πρέπει $c(x-5) \geq 0$ και³

$$\sum_{x=0}^4 f(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{x=0}^4 c(x-5) = c \left(\sum_{x=0}^4 x - 25 \right) = c \left(\frac{4(4+1)}{2} - 25 \right) = c(10 - 25) = -15c = 1 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{15}$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε ότι αν $c = -1/15$ θα είναι

$$f(x) = \frac{5-x}{15}, x = 0,1,2,3,4$$

³ Υπενθυμίζουμε ορισμένες βασικές σχέσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν αρκετές φορές στη συνέχεια

$$\sum_{x=1}^n x = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{x=1}^n x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{x=0}^n a^x = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, a \neq 1, \quad \sum_{x=0}^{\infty} a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x=1}^n a^x = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$$

η οποία είναι μη-αρνητική και παίρνει γνήσια θετικές τιμές στο $\{0,1,2,3,4\}$: αριθμήσιμο. Επομένως, η f θα είναι συνάρτηση πιθανότητας αν $c = -1/15$ και τότε θα έχει τη μορφή

$$f(x) = \frac{5-x}{15}, x = 0,1,2,3,4.$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής θα είναι

$$\begin{aligned} F(y) &= \sum_{x=0}^y f(x) = \sum_{x=0}^y \frac{5-x}{15} = \frac{1}{15} \left(5(y+1) - \sum_{x=0}^y x \right) = \frac{1}{15} \left(5(y+1) - \frac{y(y+1)}{2} \right) \\ &= \frac{(y+1)(10-y)}{30}, \quad y = 0,1,2,3,4. \end{aligned}$$

Με την παραπάνω γραφή εννοείται ότι $F(y) = 0$ για $y < 0$ και $F(y) = 1$ για $y > 4$, ενώ ενδιάμεσα στις τιμές $0,1,2,3,4$ η $F(y)$ είναι σταθερή και ίση με την τιμή της στο αριστερό άκρο $F([y])$, π.χ. $F(2.7) = F(2.11) = F(2)$, $F(3.18) = F(3.86) = F(3)$ κ.ο.κ. Αυστηρότερα, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$F(y) = P(X \leq y) = P(X \leq [y]) = F([y]) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{([y]+1)(10-[y])}{30}, & y \in [0, 4) \\ 1, & y \in [4, \infty) \end{cases}$$

Σύμφωνα και με παραπάνω σχόλια, στο εξής θα προτιμούμε να γράφουμε τον τύπο της σ.κ. F μόνο πάνω στα σημεία που αλλάζει τιμές ή ισοδύναμα πάνω στα σημεία που η f είναι γνήσια θετική.

β) Θα εργαστούμε όμοια με το (α). Θα πρέπει $cx \geq 0$ και

$$\sum_{x=1}^v f(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{x=1}^v cx = c \sum_{x=1}^v x = c \frac{v(v+1)}{2} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{2}{v(v+1)}$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε ότι αν $c = 2/(v(v+1))$ θα είναι

$$f(x) = \frac{2x}{v(v+1)}, \quad x = 1, 2, \dots, v$$

η οποία είναι μη-αρνητική και παίρνει γνήσια θετικές τιμές στο $\{1, 2, \dots, v\}$: αριθμήσιμο. Επομένως, η f θα είναι συνάρτηση πιθανότητας αν $c = 2/(v(v+1))$ και τότε θα έχει τη μορφή

$$f(x) = \frac{2x}{v(v+1)}, \quad x = 1, 2, \dots, v.$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής θα είναι

$$F(y) = \sum_{x=1}^y f(x) = \sum_{x=1}^y \frac{2x}{v(v+1)} = \frac{2}{v(v+1)} \sum_{x=1}^y x = \frac{y(y+1)}{v(v+1)}, \quad y = 1, 2, \dots, v$$

και $F(y) = 0$ για $y < 1$, $F(y) = 1$ για $y > v$.

γ) Θα πρέπει $c3^{x-1}/4^x \geq 0$ και

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{x=1}^{\infty} c \frac{3^{x-1}}{4^x} = \frac{c}{4} \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{x-1} = \frac{c}{4} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^x = \frac{c}{4} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = c = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε ότι αν $c = 1$ θα είναι

$$f(x) = \frac{3^{x-1}}{4^x}, \quad x = 1, 2, \dots$$

η οποία είναι μη-αρνητική και παίρνει γνήσια θετικές τιμές στο $\{1, 2, \dots\}$: αριθμήσιμο. Επομένως, η f είναι συνάρτηση πιθανότητας αν $c = 1$. Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής θα είναι

$$F(y) = \sum_{x=1}^y f(x) = \sum_{x=1}^y \frac{3^{x-1}}{4^x} = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{y-1} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^y}{1 - \frac{3}{4}} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^y, \quad y = 1, 2, \dots$$

και $F(y) = 0$ για $y < 1$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 1$ όπως προβλέπονταν και από την Πρόταση 2.1.

Άσκηση 2.4. Από ένα δοχείο που περιέχει 20 σφαίρες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 20 εξάγου-
με χωρίς επανάθεση 3 σφαίρες. Να δοθεί η συνάρτηση κατανομής της μέγιστης ένδειξης X στις 3
σφαίρες του δείγματος. Αν στοιχηματίσουμε ότι βγάζοντας 3 σφαίρες θα έχουμε μια τουλάχιστον
σφαίρα με ένδειξη μεγαλύτερη ή ίση του 17 ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε το στοίχημα;

Λύση. Έστω $B = \{1, 2, \dots, 20\}$. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων θα είναι

$$\Omega = \{\{a_1, a_2, a_3\} : a_1, a_2, a_3 \in B, a_i \neq a_j \text{ για } i \neq j\},$$

το σύνολο των δυνατών συνδυασμών των 20 στοιχείων ανά 3 χωρίς επανάληψη. Η τ.μ. X εκφρά-
ζει την μέγιστη ένδειξη στις 3 σφαίρες του δείγματος. Θα ισχύει ότι

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(C_x) = \frac{|C_x|}{|\Omega|},$$

όπου $C_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{\{a_1, a_2, a_3\} : a_1, a_2, a_3 \in \{1, 2, \dots, x\}, a_i \neq a_j \text{ για } i \neq j\}$ και συνεπώς

$$|C_x| = \binom{x}{3}.$$

Άρα τελικά,

$$F_X(x) = \frac{|C_x|}{|\Omega|} = \frac{\binom{x}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{x(x-1)(x-2)}{20 \cdot 19 \cdot 18}, \quad x=3, 4, \dots, 20, \quad F_X(x) = 0, x < 3, \quad F_X(x) = 1, x > 20$$

(στον ίδιο τύπο καταλήγουμε και αν θεωρήσουμε τις τριάδες $\{a_1, a_2, a_3\}$ διατεταγμένες, χρησιμο-
ποιώντας διατάξεις αντί συνδυασμούς). Αν στοιχηματίσουμε ότι βγάζοντας 3 σφαίρες θα έχουμε
μια τουλάχιστον σφαίρα με ένδειξη μεγαλύτερη ή ίση του 17, τότε η πιθανότητα να κερδίσουμε
το στοίχημα είναι

$$P(X \geq 17) = 1 - P(X < 17) = 1 - P(X \leq 16) = 1 - F_X(16) = 1 - \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = 1 - \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18} \approx 0.508.$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Συνεχείς καλούνται οι τ.μ. που έχουν ως πεδίο τιμών ένα διάστημα του $\mathbb{R}$, ή όλο το $\mathbb{R}$ ενώ
επιπλέον έχουν παραγωγίσιμες συναρτήσεις κατανομής. Οι αντίστοιχες κατανομές τους καλού-
νται συνεχείς κατανομές. Αλλά ας δούμε την περίπτωση των συνεχών τ.μ. μέσα από ένα παρά-
δειγμα.

Παράδειγμα 2.4. Έστω X ο χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα και $P(X \in (x-h, x])$ η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο χρόνος ζωής X να είναι μεταξύ του $x-h$ και του x ». Διαισθητικά, αναμένουμε ότι όσο το h μικραίνει συγκλίνοντας στο 0, τόσο και η πιθανότητα $P(X \in (x-h, x])$ θα πλησιάζει στο 0. Ας φανταστούμε π.χ. την πιθανότητα να χαλάσει ο λαμπτήρας στο διάστημα $[144.99, 145]$ ώρες ή στο διάστημα $[144.9999, 145]$ ώρες κ.ο.κ. Θα πρέπει αυτή να πλησιάζει το μηδέν. Τελικά, θα πρέπει η $P(X = x)$ να γίνεται ακριβώς μηδέν διότι το ενδεχόμενο να χαλάσει ο λαμπτήρας τη δεδομένη **στιγμή** x φαίνεται απίθανο διαισθητικά. Η τ.μ. X θα πρέπει επομένως να παίρνει τιμές σε διαστήματα της μορφής $(x-h, x]$ με θετική πιθανότητα ($P(x-h < X \leq x) > 0, x > h$) ενώ $P(x-h < X \leq x) \rightarrow 0$ για $h \rightarrow 0$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι υπάρχει μία θετική συνάρτηση $f(x)$ για την οποία θα ισχύει ότι

$$P(x-h < X \leq x) \approx f(x)h \text{ για } h \text{ αρκετά μικρό,}$$

και επομένως θα πρέπει

$$\frac{F(x) - F(x-h)}{h} = \frac{P(x-h < X \leq x)}{h} \rightarrow f(x) \text{ για } h \rightarrow 0.$$

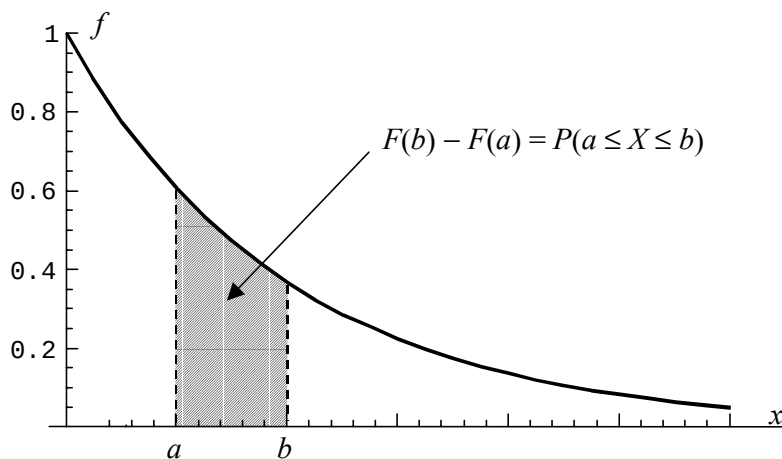
Με άλλα λόγια, για να ταιριάζει το μοντέλο στη διαίσθησή μας, αναμένουμε ότι η συνάρτηση κατανομής F_X που αντιστοιχεί στο χρόνο ζωής X του λαμπτήρα θα είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα,

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f(x),$$

για κάποια θετική συνάρτηση $f(x)$. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση από το a έως το b προκύπτει τελικά ότι η συνάρτηση κατανομής F_X θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ισχύει

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x) dx$$

για κάποια θετική συνάρτηση f . Δηλαδή η F_X θα πρέπει να υπολογίζεται με βάση το εμβαδόν κάτω από μία καμπύλη f_X όπως π.χ. στο παρακάτω σχήμα:



Θα δούμε σε επόμενα παραδείγματα ή ασκήσεις ποια μορφή μπορεί να έχει η f .

Γενικά τώρα, παρατηρούμε ότι σε αρκετές περιπτώσεις οι υπό μελέτη τ.μ. έχουν τα χαρακτηριστικά της τ.μ. X του παραπάνω παραδείγματος και άρα θα πρέπει η κατανομή τους να γράφεται με την παραπάνω μορφή (ως ορισμένο ολοκλήρωμα κάποιας θετικής συνάρτησης f). Η κατηγορία των τ.μ. με κατανομές που περιγράφονται με αυτό τον τρόπο έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις εφαρμογές. Για το λόγο αυτό θα μελετηθούν παράλληλα με τις διακριτές τ.μ. που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Συγκεκριμένα θα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.4. Μία τ.μ. X (ή αντίστοιχα η κατανομή της) θα καλείται (απόλυτα) συνεχής αν υπάρχει μία μη αρνητική συνάρτηση f_X (δηλ. $f_X \geq 0$), ώστε

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f_X θα καλείται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* (συντ. σ.π.π.) ή *πυκνότητα της συνεχούς τ.μ. X* .

Στην περίπτωση λοιπόν των συνεχών τ.μ., η συνολική πιθανότητα δεν κατανέμεται πάνω σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $\{a_1, a_2, \dots\}$ του $\mathbb{R}$ (όπως στις διακριτές τ.μ.) αλλά «απλώνεται» με συνεχή τρόπο πάνω σε όλα τα σημεία ενός διαστήματος του $\mathbb{R}$ (ή ακόμη και σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$) όπως π.χ. κατανέμεται μία μάζα κατά μήκος μιας ράβδου (μάλιστα, η σ.π.π. f δείχνει την «πυκνότητα» με την οποία έχει «απλωθεί» η συνολική πιθανότητα στον $\mathbb{R}$). Η περιγραφή της κατανομής της συνολικής πιθανότητας στον $\mathbb{R}$ γίνεται και πάλι μέσω της σ.κ. $F(x) = P(X \leq x)$ η οποία τώρα είναι συνεχής (και μάλιστα παραγωγίσιμη) συνάρτηση και δεν παρουσιάζει «άλματα» όπως στην διακριτή περίπτωση.

Είναι επίσης φανερό ότι τώρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την $P(X=x)$, $x \in X(\Omega)$ για μία απλούστερη περιγραφή της κατανομής της τ.μ. X διότι η πιθανότητα αυτή είναι τώρα πάντοτε ίση με 0. Ως αντίστοιχη της σ.π. $f(x) = P(X=x)$ (των διακριτών τ.μ.) μπορεί τώρα να θεωρηθεί η σ.π.π. Αν και για τις δύο αυτές ποσότητες συνήθως χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό f (εννοώντας σ.π. ή σ.π.π. ανάλογα με το αν εξετάζουμε διακριτή ή συνεχή τ.μ. αντίστοιχα), εντούτοις οι δύο ποσότητες έχουν σημαντικές διαφορές. Η σ.π.π. f δεν εκφράζει μία πιθανότητα (όπως η $P(X=x)$) αλλά, όπως αναφέραμε και παραπάνω, την «πυκνότητα» με την οποία έχει κατανεμηθεί η συνολική πιθανότητα στα σημεία του $\mathbb{R}$ (για αυτό και δεν παίρνει τιμές απαραίτητα στο $[0,1]$). Στη συνέχεια θα δούμε ότι οι τύποι που ισχύουν για την σ.π.π. είναι αντίστοιχοι με τους τύπους που ισχύουν για την σ.π. μόνο που τώρα στην θέση των αθροισμάτων και διαφορών παρουσιάζονται ολοκληρώματα και παράγωγοι.

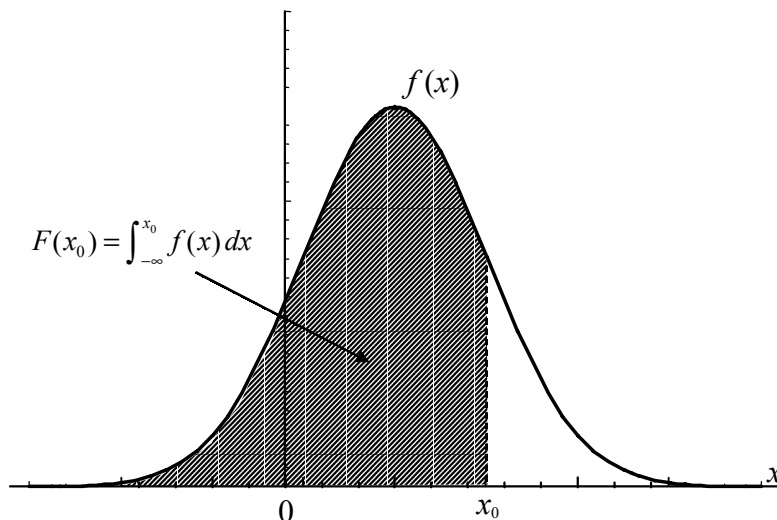
Επειδή γνωρίζουμε ότι $F_X(\infty) = 1$, $F_X(-\infty) = 0$, έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

Εξάλλου θα πρέπει $F_X(\infty) - F_X(-\infty) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$. Επίσης, θα ισχύει ότι

$$F_X(x) = F_X(x) - F_X(-\infty) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

Η σχέση αυτή δίνει έναν τύπο υπολογισμού της σ.κ. F όταν είναι γνωστή η σ.π.π. f . Με άλλα λόγια, η $F(x)$ ισούται με το εμβαδόν κάτω από την σ.π.π. f από το $-\infty$ έως το x . Σχηματικά:



Όπως αναφέραμε και παραπάνω, η συνάρτηση κατανομής F μιας συνεχούς τ.μ. είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα,

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = f_X(x),$$

σε κάθε σημείο συνέχειας της f . Η σχέση αυτή δίνει έναν τύπο υπολογισμού της σ.π.π. f όταν είναι γνωστή η σ.κ. F (πολύ απλά, η f είναι η παράγωγος της F). Επίσης, όπως αναμέναμε και διαισθητικά,

$$P(X = x) = \lim_{h \rightarrow 0} P(x - h < X \leq x) = \lim_{h \rightarrow 0} (F_X(x - h) - F_X(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{x-h}^x f_X(t) dt = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως

$$P(X < x) = P(X \leq x) - P(X = x) = P(X \leq x) = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

και

$$P(y \leq X < x) = P(y \leq X \leq x) = P(y < X \leq x) = P(y < X < x) = F_X(x) - F_X(y).$$

Παραπάνω είδαμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας συνεχούς τ.μ. είναι μία συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι

$$f_X \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = 1.$$

Αντίστοιχα, υπενθυμίζουμε ότι στις διακριτές τ.μ. η σ.π. είναι μια μη-αρνητική συνάρτηση της οποίας το άθροισμα των τιμών για όλα τα $x \in X(\Omega)$ είναι ίσο με 1. Αντίστροφα τώρα, αν μία πραγματική συνάρτηση f είναι μη-αρνητική και το ολοκλήρωμά της στο $\mathbb{R}$ είναι ίσο με 1, τότε μπορεί να θεωρηθεί ως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τ.μ. Με αυτό τον τρόπο, θεωρώντας συναρτήσεις με τα παραπάνω χαρακτηριστικά (≥ 0 με ολοκλήρωμα στο $\mathbb{R}$ μονάδα), μπορούν να προκύψουν (όπως θα δούμε και σε επόμενο κεφάλαιο) διάφορα υποδείγματα συνεχών κατανομών.

Άσκηση 2.5. Έστω συνεχής τ.μ. X η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα $[1, 3]$ με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{a}{x^2}.$$

Να υπολογίσετε: 1) τη σταθερά a , 2) τη συνάρτηση κατανομής F , και 3) την πιθανότητα $P(X > 2)$.

Λύση. Εννοείται ότι η πυκνότητα της τ.μ. X στο $\mathbb{R} - [1, 3]$ θα είναι μηδέν, δηλαδή $f(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R} - [1, 3]$. Εφόσον η f είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

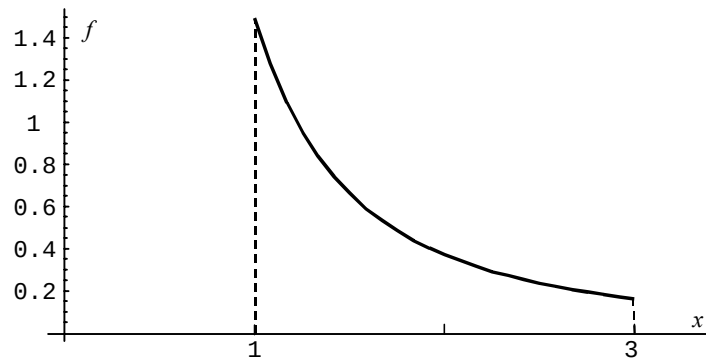
Αλλά,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^3 \frac{a}{x^2} dx + \int_3^{\infty} 0 dx = a \int_1^3 x^{-2} dx = a \int_1^3 x^{-2} dx = a \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) \Big|_1^3 \\ &= a \left(\frac{3^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1} \right) = a \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2a}{3} \end{aligned}$$

και επομένως, $a = 3/2$ και

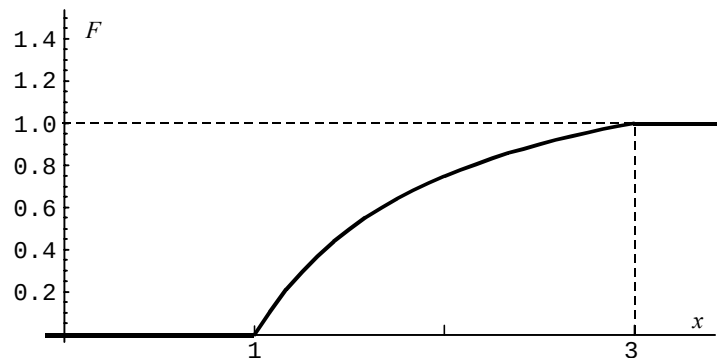
$$f(x) = \frac{3}{2x^2}, \quad x \in [1, 3],$$

ενώ $f(x) = 0$ για $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. Το a που βρήκαμε παραπάνω είναι αποδεκτό διότι οδηγεί σε μη-αρνητική f . Το γράφημα της f στη συγκεκριμένη περίπτωση θα είναι:



2) Η συνάρτηση κατανομής θα είναι ίση με

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0dt = 0, & x < 1 \\ \int_{-\infty}^1 0dt + \int_1^x \frac{3}{2t^2} dt = 0 + \frac{3}{2} \int_1^x t^{-2} dt = \frac{3}{2} (-t^{-1})_1^x = \frac{3(x-1)}{2x}, & 1 \leq x \leq 3 \\ \int_{-\infty}^1 0dt + \int_1^3 \frac{3}{2t^2} dt + \int_3^x 0dt = 0 + 1 + 0 = 1, & x > 3 \end{cases}$$



3) Θα ισχύει ότι

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{3(2-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

Άσκηση 2.6. Η συνεχής τ.μ. X έχει την ακόλουθη σ.π.π.:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^c, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε: 1) την τιμή της σταθεράς, 2) τη συνάρτηση κατανομής,

3) τις πιθανότητες $P(0.5 < X < 2)$, $P(X = 0.5)$.

Λύση. 1) Για να είναι η f συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Αλλά, ($c \neq -1$ διότι για $c = -1$ δεν ισχύει η παραπάνω ισότητα)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 2x^c dx + \int_1^{\infty} 0 dx = 2 \int_0^1 x^c dx = 2 \left(\frac{x^{c+1}}{c+1} \right)_0^1 = \frac{2}{c+1},$$

και επομένως, $c = 1$ και

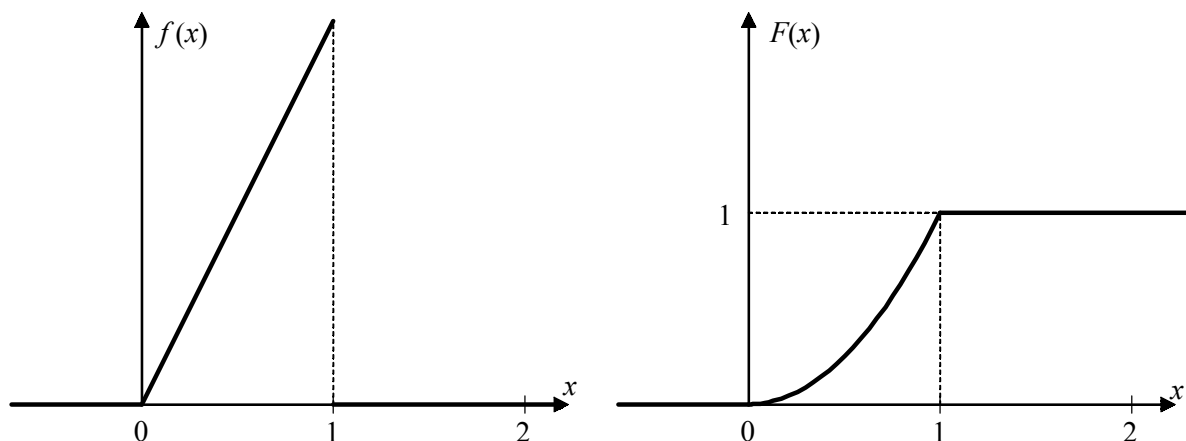
$$f(x) = 2x, \quad x \in [0, 1].$$

ενώ $f(x) = 0$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ (το c είναι αποδεκτό διότι οδηγεί σε μη-αρνητική f).

2) Η συνάρτηση κατανομής θα είναι ίση με

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0dt = 0, & x < 0 \\ \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x 2tdt = 2 \int_0^x tdt = x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 2tdt + \int_1^x 0dt = 0 + 1 + 0 = 1, & x > 1 \end{cases}$$

Τα αντίστοιχα γραφήματα θα είναι:



3) Θα είναι

$$P(0.5 < X < 2) = F(2) - F(0.5) = 1 - 0.5^2 = 0.75,$$

ενώ επειδή η X είναι συνεχής τ.μ. θα ισχύει ότι $P(X = 0.5) = 0$.

Άσκηση 2.7. Έστω X η τ.μ. που εκφράζει το χρόνο ζωής (σε χιλιάδες ώρες) ενός λαμπτήρα. Έχει βρεθεί ότι η πιθανότητα να λειτουργήσει ο λαμπτήρας χρόνο περισσότερο από x είναι

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

για κάποιο $\lambda > 0$. Να βρεθεί η σ.κ. F και η σ.π.π. f της τ.μ. X . Το εργοστάσιο το οποίο κατασκευάζει τους λαμπτήρες, επιθυμεί να δώσει στους πελάτες εγγύηση για ορισμένο αριθμό ωρών. Αν ένας λαμπτήρας καεί νωρίτερα επιστρέφεται στο εργοστάσιο για αντικατάσταση. Αν έχει εκτιμηθεί ότι $\lambda = 0.1$, ποιος αριθμός ωρών πρέπει να δοθεί σαν εγγύηση ώστε το πολύ 1% των λυχνιών να επιστρέφονται στο εργοστάσιο;

Λύση. Η συνάρτηση κατανομής θα είναι

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Για τη σ.π.π. θα ισχύει ότι

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} (1 - e^{-\lambda x}) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

ενώ $f(x) = 0$ για $x < 0$. Τέλος, επιθυμούμε να καθορίσουμε το χρόνο εγγύησης c ώστε να ισχύει

$$P(X \leq c) \leq 0.01 = a \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda c} \leq a \Leftrightarrow e^{-\lambda c} \geq 1 - a \Leftrightarrow -\lambda c \geq \ln(1 - a) \Leftrightarrow c \leq -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - a)$$

Επομένως, ο χρόνος εγγύησης θα πρέπει να είναι

$$c = -\frac{1}{0.1} \ln 0.99 = 10 \cdot 0.0100503 = 0.100503 \approx 100 \text{ ώρες.}$$

Συναρτήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής.

Έστω X μία διακριτή ή συνεχή τ.μ. που εκφράζει μία ποσότητα, η τιμή της οποίας εξαρτάται από το αποτέλεσμα κάποιου τυχαίου πειράματος. Σε αρκετές περιπτώσεις εμφανίζεται η ανάγκη μελέτης μιας συνάρτησης $Y = g(X)$ της τ.μ. X . Η συνάρτηση αυτή της τ.μ. X θα είναι μία νέα τ.μ. διότι μπορεί να θεωρηθεί και αυτή ως μία απεικόνιση Y από το δειγματικό χώρο Ω στο σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα:

- Αν X είναι το πλήθος των αγοριών σε μία οικογένεια τριών παιδιών τότε η τ.μ. $Y = 3 - X$ εκφράζει το πλήθος των κοριτσιών.

- Αν X είναι το ύψος των πωλήσεων (σε τεμάχια) ενός προϊόντος, a είναι η τιμή ενός τεμαχίου, και b ένα πάγιο κόστος, τότε η νέα τ.μ. $Y = aX - b$ εκφράζει το συνολικό κέρδος.

Γενικότερα μπορούμε να θεωρήσουμε συναρτήσεις της μορφής π.χ. X^2 , e^{aX} , $\sqrt{X}$, $1/X$ κ.ο.κ. Ένα ερώτημα που γεννάται εδώ είναι το εξής: ποια θα είναι η συνάρτηση κατανομής F_Y της τ.μ. $Y = g(X)$ αν είναι γνωστή η σ.κ. F_X της τ.μ. X . Αν η g είναι γνήσια αύξουσα (και άρα αντιστρέψιμη) στο πεδίο τιμών της X θα έχουμε ότι

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(g(X) \leq x) = P(X \leq g^{-1}(x)) = F_X(g^{-1}(x)),$$

και αν η X είναι συνεχής τ.μ., τότε

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{d}{dx} F_X(g^{-1}(x)) = f_X(g^{-1}(x)) \frac{dg^{-1}(x)}{dx}.$$

Για παράδειγμα, αν $Y = aX^2 + b$ και X συνεχής τ.μ. με τιμές στο $[0, \infty)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, τότε

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(aX^2 + b \leq x) = P(X \leq \sqrt{\frac{x-b}{a}}) = F_X(\sqrt{\frac{x-b}{a}}), \quad x \geq b,$$

και $F_Y(x) = 0$, $x < b$ ενώ

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = f_X(g^{-1}(x)) \frac{dg^{-1}(x)}{dx} = f_X\left(\sqrt{\frac{x-b}{a}}\right) \frac{1}{2a\sqrt{\frac{x-b}{a}}} \text{ για } x \geq b.$$

Αν π.χ. $f_X(x) = 1$, $x \in [0, 1]$ και $f_X(x) = 0$, $x \notin [0, 1]$, τότε η νέα τ.μ. $Y = X^2 \in [0, 1]$ έχει σ.π.π. την

$$f_Y(x) = f_X(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in [0, 1].$$

Αντίστοιχα, αν η g είναι γνήσια φθίνουσα στο πεδίο τιμών της τ.μ. X τότε

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(g(X) \leq x) = P(X \geq g^{-1}(x)) = 1 - F_X(g^{-1}(x)) \quad (\text{θεωρ. ότι } X \text{ συνεχής τ.μ.})$$

π.χ. αν $Y = c/X$, $X > 0$ συνεχής τ.μ., $c > 0$ τότε

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{c}{X} \leq x\right) = P\left(X \geq \frac{c}{x}\right) = 1 - F_X\left(\frac{c}{x}\right), \quad x > 0,$$

και

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{d}{dx} \left(1 - F_X\left(\frac{c}{x}\right)\right) = f_X\left(\frac{c}{x}\right) \frac{c}{x^2}, \quad x > 0.$$