



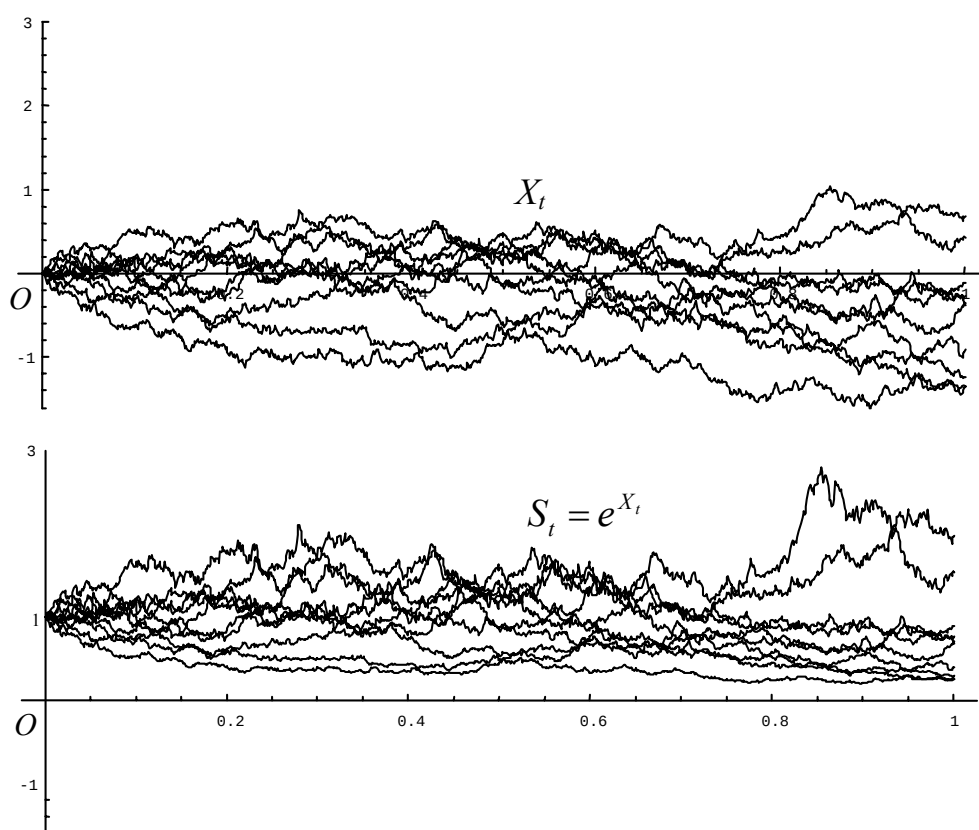
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ:

ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

(Εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση)



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1, Εισαγωγή στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

- 1.1. Χρηματοοικονομικοί Τίτλοι (*Μετοχές, Ομολογιακά Δάνεια, Το Χρηματιστήριο*)
- 1.2. Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (*Προθεσμιακά συμβόλαια - forward contracts, Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης - Future contracts, Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων - Stock Repo, Δικαιώματα προαίρεσης - options*)
- 1.3. Τύποι συναλλασσομένων (*Hedgers, Speculators - κερδοσκόποι, Arbitrageurs*)
- 1.4. Στρατηγικές αγοραπωλησιών μετοχών και δικαιωμάτων προαίρεσης (*Στρατηγικές που αφορούν μια μετοχή και ένα δικαίωμα προαίρεσης, Στρατηγικές που αφορούν δικαιώματα προαίρεσης ιδίου τύπου (Bull spread – Bear spread – Butterfly Spread), Στρατηγικές που αφορούν δικαιώματα αγοράς και πώλησης ταυτόχρονα (Straddle – Strip and Strap – Strangles)*)

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2, Εισαγωγή στην Τιμολόγηση Παραγώγων – Διωνυμικό Μοντέλο μιας Περιόδου

- 2.1. Χρονική Αξία Χρήματος – Επιτόκια (*Ανατοκισμός σε k Περιόδους, Συνεχής Ανατοκισμός, Κυμαινόμενο Επιτόκιο με Συνεχή Ανατοκισμό, Παρούσα και Μελλοντική Αξία*)
- 2.2. Τιμολόγηση Forwards και Futures
- 2.3. Χρηματοοικονομική αγορά και Χαρτοφυλάκια
- 2.4. Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης - Διωνυμικό Μοντέλο Μιας Περιόδου
- 2.5. Αλλαγή του μέτρου πιθανότητας, ο «κόσμος ουδέτερου ρίσκου».
- 2.6. Σχέσεις μεταξύ των τιμών διαφόρων δικαιωμάτων.

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3, Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου – Πιθανοτήτων

- 3.1. σ-άλγεβρα
- 3.2. Μέτρο
- 3.3. Μετρήσιμη συνάρτηση (ή τυχαίο στοιχείο - random element)
- 3.4. Ολοκλήρωμα Lebesgue – Μέση τιμή
- 3.5. Πυκνότητα ή Radon-Nikodym παράγωγος
- 3.6. Στοχαστική Ανεξαρτησία
- 3.7. Δεσμευμένη μέση τιμή
- 3.8. Ιδιότητες Δεσμευμένης Μέσης Τιμής
- 3.9. Στοχαστική Ανέλιξη
- 3.10. Martingales

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4, Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης σε Διακριτό Χρόνο - Διωνυμικό Μοντέλο Πολλών Περιόδων

- 4.1. Αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική σε διακριτό χρόνο
- 4.2. Διωνυμικό μοντέλο n περιόδων
- 4.3. Η no-arbitrage αξία παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων σε μοντέλο n περιόδων.

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5, Κίνηση Brown – Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση

- 5.1. Κίνηση Brown
- 5.2. Η Γεωμετρική Κίνηση Brown
- 5.3. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
- 5.4. Το ολοκλήρωμα Itô
- 5.5. Βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô.
- 5.6. Ο τύπος του Itô
- 5.7. Στοχαστικές Ανελίζεις Itô
- 5.8. Αλλαγή μέτρου πιθανότητας – Θεώρημα Girsanov
- 5.9. Θεώρημα Αναπαράστασης martingale

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6, Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης σε συνεχή χρόνο – Το μοντέλο των Black and Scholes

- 6.1. Το Μοντέλο των Black – Scholes
- 6.2. Εφαρμογή του τύπου των Black-Scholes στην πράξη.
- 6.3. Ιδιότητες της τιμής ενός δικαιώματος από τον τύπο των B-S
- 6.4. Στρατηγική εξασφάλισης Δέλτα (*Delta Hedging*)
- 6.5. Διάφορες παραλλαγές δικαιωμάτων προαίρεσης (exotic options)
- 6.6. Γενίκευση του μοντέλου των Black-Scholes (στοχαστική μεταβλητότητα, τάση και επιτόκιο)

Εισαγωγή

Οι σημειώσεις αυτές έγιναν για να καλύψουν τις ανάγκες διδασκαλίας του προπτυχιακού μαθήματος «Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα» που διδάσκεται για πρώτη φορά το Ακαδ. Έτος 2005-6 στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς (7^ο εξάμηνο σπουδών).

Οι συγκεκριμένες σημειώσεις μπορούν επίσης να αξιοποιηθούν από (τελειόφοιτους ή μεταπτυχιακούς) φοιτητές με επαρκές υπόβαθρο στη μαθηματική ανάλυση και στη θεωρία πιθανοτήτων (π.χ. απόφοιτοι ή τελειόφοιτοι τμ. Μαθηματικών, Στατιστικής, Φυσικής, Μηχανικών, Χρηματοοικονομικών κ.α.) που επιθυμούν να έχουν μια πρώτη επαφή με τη *στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση* (*Stochastic Finance*, *Financial Mathematics*, *Financial Engineering*).

Σκοπός - Σύντομη περιγραφή αντικειμένου

Αρχικά (**Κεφάλαιο 1**) πραγματοποιείται μια γενική περιγραφή των χρηματιστηριακών αγορών καθώς και διαφόρων παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων (Προθεσμιακά συμβόλαια - forwards, Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης - futures, Δικαιώματα προαίρεσης - options). Σε αυτό το πλαίσιο αναπτύσσονται περιληπτικά και κάποια θέματα που αφορούν επενδυτές σε πρακτικό επίπεδο (π.χ. στρατηγικές αγοραπωλησιών μετοχών και δικαιωμάτων προαίρεσης).

Το κύριο πρόβλημα που τίθεται φυσιολογικά στην συνέχεια σχετίζεται με την τιμή των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων σε μια χρηματιστηριακή αγορά (option pricing). Τα προϊόντα αυτά μπορούν να διαπραγματεύονται σε οποιαδήποτε τιμή; Το ερώτημα αυτό αποδεικνύεται εξαιρετικά γόνιμο και για την αντιμετώπισή του οδηγούμαστε στην εισαγωγή εννοιών όπως το *βέβαιο κέρδος χωρίς κίνδυνο* (arbitrage), τα *αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια* (self-financing portfolios), τη *στρατηγική εξασφάλισης* (hedging), τον *κόσμο «ουδέτερου κινδύνου»* (risk-neutral world) κ.α. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η μελέτη ενός τόσο πρακτικού προβλήματος αποδεικνύεται ότι απαιτεί τη χρήση αρκετά «προχωρημένων» μαθηματικών τεχνικών που βασίζονται στην *μαθηματική ανάλυση* και στη *θεωρία στοχαστικών ανελίξεων*.

Στις σημειώσεις αυτές, η μελέτη του προβλήματος της αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης επιχειρείται βηματικά έτσι ώστε να γίνουν περισσότερο κατανοητές οι απαραίτητες έννοιες. Αρχικά το πρόβλημα της αποτίμησης μελετάται σε ένα υπεραπλουστευμένο μοντέλο αγοράς (**Κεφάλαιο 2**, *διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου*) όπου όμως γεννάται σε ακατέργαστη μορφή η διαδικασία που θα μας οδηγήσει στην αντιμετώπιση του προβλήματος σε πιο ρεαλιστικά μοντέλα. Στο μοντέλο αυτό η αγορά εξετάζεται σε δύο μόνο χρονικά σημεία. Μέχρις εδώ δεν χρειάζονται ιδιαίτερες και εξειδικευμένες μαθηματικές τεχνικές, παρά μόνο η στοιχειώδης γνώση της θεωρίας των πιθανοτήτων.

Στη συνέχεια, το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου γενικεύεται στο *διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων* (**Κεφάλαιο 4**). Αν και η γενίκευση από ένα μοντέλο αγοράς που εξετάζεται σε δύο μόνο χρονικά σημεία, σε ένα μοντέλο αγοράς που εξετάζεται σε n χρονικά σημεία είναι απόλυτα φυσιολογική, η μελέτη τώρα απαιτεί πιο εξειδικευμένα μαθηματικά εργαλεία. Για το λόγο αυτό, πριν από την παρουσίασή του, πραγματοποιείται μια σύντομη επισκόπηση βασικών εννοιών της *θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης* καθώς και της θεωρίας των *martingales* (**Κεφάλαιο 3**). Το διωνυμικό μοντέλο n περιόδων, ως μοντέλο διακριτού χρόνου εξακολουθεί να είναι απλουστευτικό αλλά πλησιάζει πολύ περισσότερο την πραγματικότητα. Αρκεί κανείς να θεωρήσει το n πολύ μεγάλο (θεωρητικά $n \rightarrow \infty$) για να πάρει μια σαφή εικόνα για το πώς θα πρέπει να αντιμετωπίσει το πρόβλημα σε περισσότερο ρεαλιστικά μοντέλα όπως είναι τα μοντέλα συνεχούς χρόνου.

Κατά την «μετάφραση» σε συνεχή χρόνο εννοιών που χρησιμοποιήθηκαν στα μοντέλα διακριτού χρόνου, ανακύπτει φυσιολογικά η έννοια της στοχαστικής ανελίξης που είναι γνωστή ως *κίνηση Brown*. Η κίνηση Brown χρησιμοποιείται κυρίως για να εκφράσει τον τρόπο με τον οποίο κινείται η τιμή ενός χρηματοοικονομικού τίτλου. Επίσης, κατά την μετάφραση σε συνεχή χρόνο του σωρευτικού κέρδους από ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο ανακύπτει και η ανάγκη ορισμού ενός «αθροίσματος» που σχετίζεται με απειροστές προσανζησεις μιας κίνησης Brown. Το «άθροισμα» αυτό, το οποίο είναι γνωστό ως *ολοκλήρωμα Itô*, ορίζεται αυστηρά και μελετώνται κάποιες βασικές του ιδιότητες και προεκτάσεις οι οποίες μας είναι απαραίτητες. Η συγκεκριμένη ανάλυση παρουσιάζεται στο **Κεφάλαιο 5** και αποτελεί μια πολύ μικρή εισαγωγή στην γνωστή ως *στοχαστική ανάλυση* (stochastic calculus).

Τέλος στο **Κεφάλαιο 6**, μεταφράζονται σε συνεχή χρόνο οι έννοιες που παρουσιάστηκαν στα μοντέλα διακριτού χρόνου και με την χρήση των εργαλείων που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 5 μελετάται

ένα δημοφιλές μοντέλο αγοράς συνεχούς χρόνου, το μοντέλο *Black and Scholes*. Το μοντέλο αυτό αποτελεί το κλασικό μοντέλο αναπαράστασης μιας χρηματοοικονομικής αγοράς και αποτίμησης των παραγώγων της. Στα πλαίσια αυτά αποδεικνύεται και μελετάται ο γνωστός ως *τύπος των Black and Scholes* που εκφράζει την τιμή «ισορροπίας» ενός συγκεκριμένου δικαιώματος προαίρεσης. Επίσης περιγράφεται η *στρατηγική εξασφάλισης Δέλτα* (Delta Hedging) και παρουσιάζονται και διάφορες παραλλαγές των κλασικών (vanilla) δικαιωμάτων προαίρεσης που είναι γνωστά ως *εξωτικά ή εξωτερικά δικαιώματα προαίρεσης* (exotic options).

Ενδεικτική Βιβλιογραφία

Είναι προφανές ότι σε ένα εξαμηνιαίο μάθημα δεν μπορεί να καλυφθεί επαρκώς μια τόσο ενδιαφέρουσα (για ερευνητές και για επαγγελματίες) και ταχέως διευρυνόμενη ερευνητική περιοχή. Σε επόμενη έκδοση θα γίνει προσπάθεια να συμπεριληφθούν περισσότερα κεφάλαια. Για τους αναγνώστες που ενδιαφέρονται να εμβαθύνουν περισσότερο *προτείνονται τα βιβλία των :*

- SHELTON M. ROSS (1999) *An introduction to mathematical finance*. Cambridge University Press (για μία πρώτη και πολύ σύντομη εισαγωγή στο αντικείμενο χωρίς πολλές τεχνικές λεπτομέρειες)
- JOHN C. HULL (1989-2005) *Options, futures and other derivatives*. Prentice Hall (για αυτούς που ενδιαφέρονται περισσότερο για την πρακτική πλευρά των παραγώγων και τη λειτουργία της αγοράς)
- STEVEN E. SHREVE (2003) *Stochastic calculus for finance I (the binomial asset pricing model)*, *Stochastic calculus for finance II (continuous-time models)*. Springer (για μια πιο τεκμηριωμένη και ολοκληρωμένη περιγραφή των στοχαστικών μοντέλων πίσω από τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα)

- Επίσης μια ενδεικτική λίστα βιβλίων που ασχολούνται με το αντικείμενο είναι η ακόλουθη (στη διεθνή βιβλιογραφία κυκλοφορούν δεκάδες ακόμη συναφή βιβλία)

- N. BINGHAM AND R. KIESEL (2000) *Risk – neutral valuation. Pricing and hedging of financial derivatives*. Springer - Verlag.
- J. C. COX AND M. RUBINSTEIN (1985) *Options markets*. Prentice – Hall.
- A. ETHERIDGE (2002) *A course in financial calculus*. Cambridge University Press.
- H.R.ELLIOT AND P.E. KOPP (1991) *Mathematics of financial markets*. Springer.
- G. KALLIANPUR AND R.L. KARANDIKAR (2000) *Introduction to option pricing theory*. Birkhauser.
- I. KARATZAS, S. E. SHREVE (1997) *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer
- I. KARATZAS, S. E. SHREVE (1998) *Methods of mathematical finance*. Springer.
- F. C. KLEBANER (1998) *Introduction to stochastic calculus with applications*. Imperial College Press.
- D. LAMBERTON AND B. LAPEYRE (1996) *Introduction to stochastic calculus applied to finance* (translated), Chapman and Hall.
- NEFTCI (2000) *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. Academic Press.

- Τέλος, μερικά από τα συγγράμματα / σημειώσεις που υπάρχουν στην Ελληνική βιβλιογραφία είναι:

- Π.-Χ. Γ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ (2001) *Στοχαστικά χρηματοοικονομικά*, Εκδόσεις Ζήτη.
- Α. ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ (2004) *Στοχαστική ανάλυση και εφαρμογές στη χρηματοοικονομική*. Σημειώσεις παραδόσεων, τμ. Στατιστικής & Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπ. Αιγαίου.
- Α. ΠΑΠΑΓΕΛΟΥ (2000) *Στοχαστικές ανελίξεις στη χρηματοοικονομική*. Σημειώσεις παραδόσεων, τμ. Μαθηματικών, Εθν. & Καποδ. Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Ε. ΣΥΡΡΑΚΟΣ (2000) *Χρηματιστηριακά και επιτοκιακά παράγωγα*. Conceptum A.E.

*Μπούτσικας Μιχαήλ
Αθήνα, Δεκέμβριος 2005*