

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### Τιμολόγηση Δικαιωμάτων σε συνεχή χρόνο – Το μοντέλο των Black and Scholes

#### 6.1. Το Μοντέλο των Black – Scholes (ή Black – Scholes – Merton)

Έστω μια χρηματοοικονομική αγορά εξεταζόμενη στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$  για κάποιο δεδομένο  $T$ . Συμβολίζουμε με  $\Omega$  το σύνολο των δυνατών καταστάσεων της αγοράς στο χρονικό αυτό διάστημα και με  $\mathcal{F}$  το χώρο ενδεχομένων του. Υποθέτουμε ότι στο χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$  ορίζεται μια τυπική κίνηση Brown  $W_t, t \in [0, T]$  με το φυσικό της φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_x, x \leq t), t \in [0, T]$ . Ο χώρος  $(\Omega, \mathcal{F})$  είναι εφοδιασμένος και με ένα μέτρο πιθανότητας  $P$ . Θεωρούμε ότι στην αγορά αυτή διατίθενται οι παρακάτω τίτλοι :

**Ο τίτλος 1 (riskless asset).** Ένα ομόλογο επί μιας χρηματικής μονάδας (στο χρόνο 0) με σταθερό επιτόκιο  $r$ . Η αξία του στο χρόνο  $t$  είναι  $e^{rt}$ . Με βάση αυτό, η παρούσα (προεξοφλημένη) αξία μιας χρηματικής μονάδας στο χρόνο  $t$  θα είναι  $e^{-rt}$ .

**Ο τίτλος 2 (risky asset).** Μια μετοχή (π.χ. AAA) η οποία στο χρόνο  $t$  έχει αξία  $S_t$ . Σύμφωνα και με όσα έχουμε εκθέσει σε προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε ότι η στοχαστική ανέλιξη  $S_t, t \in [0, T]$  είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown με αρχική τιμή  $S_0$ , δηλαδή

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t},$$

όπου  $W_t, t \in [0, T] \sim \text{BM}(0,1)$  και  $\mu$  (drift),  $\sigma$  (volatility) κάποιες σταθερές παράμετροι. Από το λήμμα του Itô είδαμε (Εφαρμογή 5.6.2) ότι η  $S_t$  ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t dt.$$

**Ο τίτλος 3 (derivative).** Ένα απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου με χρόνο λήξης  $T$  (επί της μετοχής AAA). Ανάλογα και με το μοντέλο διακριτού χρόνου, ως ένα τέτοιο παράγωγο πολύ απλά θεωρείται μία τ.μ.  $U_T$  που είναι  $\mathcal{F}_T$  – μετρήσιμη (η τ.μ.  $U_T$  εκφράζει την αξία του παραγώγου στο χρόνο  $T$ ).

Προσοχή, στο μοντέλο αυτό έχουμε υποθέσει ότι η μελλοντική ιστορία  $\mathcal{F}_t, t \in [0, T]$  είναι το φυσικό φιλτράρισμα της  $W_t, t \in [0, T]$ . Επομένως, το γεγονός ότι απαιτείται η  $U_T$  να είναι  $\mathcal{F}_T$  – μετρήσιμη υπονοεί ότι η «τυχειότητα» της τιμής της  $U_T$  θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από την διαδρομή της  $W_t, t \in [0, T]$ , και όχι από κάποιο άλλο τυχαίο παράγοντα.

Το πρόβλημα που καλούμαστε τώρα να αντιμετωπίσουμε είναι η εύρεση της αξίας του παραγώγου σε χρόνο  $t \in [0, T]$ . Το παραπάνω μοντέλο προτάθηκε και μελετήθηκε αρχικά από τους F. Black, M. Scholes (και από τον R. Merton) το έτος 1973 και για αυτό είναι γνωστό με το όνομά τους. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές τιμήθηκαν με το βραβείο Nobel το έτος 1997 για την

εργασία τους αυτή. Αξίζει να αναφέρουμε όμως ότι η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα (θεωρία martingales) είναι διαφορετική από αυτήν που χρησιμοποίησαν οι συγκεκριμένοι ερευνητές (θεωρία διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους) ενώ φυσικά προκύπτει το ίδιο τελικό αποτέλεσμα.

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω θα ακολουθήσουμε την ίδια αποδεικτική οδό με το μοντέλο αγοράς διακριτού χρόνου. Συγκεκριμένα θα κατασκευάσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο (χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης) με τελική αξία ίση με την αξία του παραγώγου  $U_T$  στο χρόνο εξάσκησης  $T$  η οποία είναι γνωστή. Π.χ. για το δικαίωμα αγοράς είναι γνωστό ότι  $U_T = (S_T - K)_+$ . Για να μην υπάρξει δυνατότητα για arbitrage στην αγορά θα πρέπει το παράγωγο προϊόν να έχει την ίδια αξία με το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης για κάθε  $t \in [0, T]$ .

Έστω λοιπόν ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που στο χρόνο  $t$  αποτελείται από  $\psi_t$  ομόλογα και  $\Delta_t$  μετοχές, δηλαδή  $\mathbf{x}_t = (\psi_t, \Delta_t)$ . Συμβολίζουμε με

$$V_t = \mathbf{x}_t \cdot \mathbf{S}'_t = e^{rt}\psi_t + \Delta_t S_t, \quad (\mathbf{S}_t = (e^{rt}, S_t))$$

την αξία του στο χρόνο  $t \in [0, T]$ . Εφόσον το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο θα ισχύει επίσης ότι (βλ. Παράδειγμα 5.3.1),

$$dV_t = \psi_t de^{rt} + \Delta_t dS_t,$$

δηλαδή η απειροστή μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου στο  $[t, t+dt]$  οφείλεται αποκλειστικά στην μεταβολή της αξίας του ομολόγου ( $de^{rt} = e^{rt} r dt$ ) και της μετοχής ( $dS_t$ ), τεμάχια των οποίων απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο. Δεν προστίθεται κανένα εξωτερικό ποσό ούτε αφαιρείται κανένα ποσό από το χαρτοφυλάκιο. Η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι ανάλογη της εξίσωσης διαφορών

$$\begin{aligned} V_{ih} - V_{(i-1)h} &= \mathbf{x}_{ih} \cdot \mathbf{S}'_{ih} - \mathbf{x}_{(i-1)h} \cdot \mathbf{S}'_{(i-1)h} = \mathbf{x}_{(i-1)h} \cdot (\mathbf{S}'_{ih} - \mathbf{S}'_{(i-1)h}) \\ &= \psi_{(i-1)h} (e^{r_{ih}} - e^{r_{(i-1)h}}) + \Delta_{(i-1)h} (S_{ih} - S_{(i-1)h}) \end{aligned}$$

που είδαμε στο Παράδειγμα 5.3.1 ότι ισχύει σε διακριτό χρόνο.

Στο εξής θα συμβολίζουμε με  $V_t^* = e^{-rt}V_t$  και με  $S_t^* = e^{-rt}S_t$  την παρούσα (προεξοφλημένη) αξία του χαρτοφυλακίου και της υποκείμενης μετοχής στο χρόνο  $t$  αντίστοιχα. Το επόμενο ενδιαμέσο αποτέλεσμα θα μας βοηθήσει στην απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος της παραγράφου.

**Λήμμα 6.1.1.** *Η προεξοφλημένη αξία του αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου στο χρόνο  $t$  μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής,*

$$V_t^* = V_0 + \sigma \int_0^t \Delta_s S_s^* dW'_s,$$

όπου  $W'_t = W_t + \Theta t$ , με  $\Theta = \frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$ .

**Απόδειξη.** Χρησιμοποιώντας τις προαναφερθείσες σχέσεις  $dV_t = \psi_t de^{rt} + \Delta_t dS_t$ ,  $V_t = e^{rt} + \Delta_t S_t$  και το γεγονός ότι  $de^{-rt} = -re^{-rt}$ , θα έχουμε

$$\begin{aligned} dV_t^* &= d(e^{-rt}V_t) = e^{-rt}dV_t + V_t de^{-rt} + dV_t de^{-rt} = e^{-rt}(\psi_t de^{rt} + \Delta_t dS_t) + (e^{rt}\psi_t + \Delta_t S_t)de^{-rt} + 0 \\ &= e^{-rt}\psi_t de^{rt} + e^{-rt}\Delta_t dS_t + e^{rt}\psi_t de^{-rt} + \Delta_t S_t de^{-rt} = \Delta_t (e^{-rt}dS_t + S_t de^{-rt}) = \Delta_t dS_t^*. \end{aligned}$$

Από την σχέση τώρα,  $dS_t = \sigma S_t dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)S_t dt$ , προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} dS_t^* &= e^{-rt} dS_t + S_t de^{-rt} = e^{-rt} (\sigma S_t dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)S_t dt) - re^{-rt} S_t dt \\ &= \sigma e^{-rt} S_t (dW_t + \frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma} dt) = \sigma S_t^* dW'_t, \end{aligned}$$

και επομένως,  $dV_t^* = \Delta_t dS_t^* = \sigma \Delta_t S_t^* dW'_t$ , από όπου ολοκληρώνοντας προκύπτει η ζητούμενη σχέση.  $\square$

Αν τώρα υπήρχε ένα μέτρο πιθανότητας  $Q$  στο χώρο  $(\Omega, \mathfrak{F})$ , υπό το οποίο η  $W'_t$  είναι κίνηση Brown  $BM(0,1)$  (υπό το μέτρο  $P$  προφανώς δεν είναι  $BM(0,1)$ ) τότε η  $V_t^*$  θα είναι  $Q$ -martingale (διότι γράφεται σαν ολοκλήρωμα Itô ως προς την  $W'_t$ , βλ. 5.5.1.(iv)). Επομένως, θα ισχυε ότι  $V_t^* = E_Q(V_T^* | \mathfrak{F}_t)$  και άρα

$$V_t = e^{rt} E_Q(e^{-rT} V_T | \mathfrak{F}_t) = E_Q(e^{-r(T-t)} V_T | \mathfrak{F}_t), \quad t \in [0, T].$$

Αν επιπλέον μπορούσαμε να κατασκευάσουμε το αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο ώστε να έχει τελική τιμή  $V_T = U_T$  (ίση με την αξία του παραγώγου στο χρόνο  $T$ ) τότε θα είχαμε εξαγάγει έναν τύπο για την αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο  $t$  (συναρτήσει του  $U_T$ ) που θα είναι η ζητούμενη no-arbitrage αξία του παραγώγου προϊόντος.

Στο ακόλουθο θεώρημα επιβεβαιώνεται ότι πράγματι υπάρχει ένα μέτρο όπως το  $Q$  που ζητάμε, και επίσης ότι μπορεί να κατασκευασθεί το αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης που μας χρειάζεται. Το πρώτο αποτέλεσμα βασίζεται στο Θεώρημα του Girsanov ενώ το δεύτερο βασίζεται στο θεώρημα αναπαράστασης martingale.

**Θεώρημα 6.1.1. (risk neutral pricing formula)** Στο μοντέλο Black-Scholes(-Merton): (α) Αν ένα απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν (Ευρωπαϊκού τύπου) με χρόνο λήξης  $T$  έχει τελική αξία  $U_T$  τότε στο χρόνο  $t$  θα έχει no-arbitrage αξία

$$U_t = e^{-r(T-t)} E_Q(U_T | \mathfrak{F}_t), \quad t \in [0, T],$$

όπου το μέτρο πιθανότητας  $Q$  είναι τέτοιο ώστε  $dQ = Z_T dP$  με  $Z_T = \exp(-\Theta W_T - \frac{1}{2}\Theta^2 T)$  (δηλαδή  $Q(A) = E_P(Z_T \cdot I_A)$ ,  $A \in \mathfrak{F}$ ).

(β) Υπό το μέτρο πιθανότητας  $Q$ , η ανέλιξη της τιμής της μετοχής  $S_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους  $r - \sigma^2/2$  και  $\sigma^2$  ( $GBM(r - \sigma^2/2, \sigma^2)$ ).

**Απόδειξη.** (α) Από το Θεώρημα Girsanov, η ανέλιξη Itô

$$W'_t = W_t + \Theta t = W_t + \int_0^t \Theta dx, \quad \text{όπου } \Theta = \frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma},$$

είναι κίνηση Brown  $\mathfrak{F}_t$  -  $BM(0,1)$  ως προς το μέτρο πιθανότητας  $Q$  που περιγράφεται από το ίδιο Θεώρημα: σε κάθε  $A$  του  $\mathfrak{F}$  αντιστοιχεί το  $Q(A) = E_P(Z_T \cdot I_A)$  με  $Z_t = \exp(-\Theta W_t - \frac{1}{2}\Theta^2 t)$ .

Επομένως η ανέλιξη (βλ. Λήμμα 6.1.1)

$$V_t^* = V_0 + \sigma \int_0^t \Delta_x S_x^* dW'_x, \quad t \in [0, T]$$

είναι ίση με  $V_0$  συν ένα ολοκλήρωμα Itô ως προς την  $W_t'$  η οποία είναι BM(0,1) υπό το μέτρο  $Q$ . Από παραπάνω αποτέλεσμα (Πρόταση 5.5.1.(iv)), η  $V_t^*$  θα είναι  $Q$  - martingale και επομένως,  $V_t^* = E_Q(V_T^* | \mathfrak{F}_t)$  από όπου προκύπτει ότι

$$V_t = e^{rt} E_Q(e^{-rT} V_T | \mathfrak{F}_t) = E_Q(e^{-r(T-t)} V_T | \mathfrak{F}_t), \quad t \in [0, T].$$

Αν τώρα το αυτοχρηματοδοτούμενο αυτό χαρτοφυλάκιο μπορεί να κατασκευασθεί έτσι ώστε να έχει τελική τιμή  $V_T = U_T$ , την αξία του παραγώγου προϊόντος στο χρόνο  $T$ , τότε προκύπτει ο τύπος του θεωρήματος. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι πράγματι υπάρχει ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο.

Ορίζουμε την ανέλιξη  $U_t = E_Q(e^{-r(T-t)} U_T | \mathfrak{F}_t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Θα δείξουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε το αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με αξία  $V_t$  στο χρόνο  $t$ , έτσι ώστε  $V_t = U_t$ ,  $t \in [0, T]$  και επομένως και  $V_T = U_T$ .

Είναι σχεδόν άμεσο να διαπιστώσουμε ότι η ανέλιξη  $U_t^* = e^{-rt} U_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι  $Q$ -martingale ως προς την ιστορία  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Πράγματι, για  $s < t < T$ ,

$$\begin{aligned} E_Q(U_t^* | \mathfrak{F}_s) &= e^{-rt} E_Q(U_t | \mathfrak{F}_s) = e^{-rt} E_Q(E_Q(e^{-r(T-t)} U_T | \mathfrak{F}_t) | \mathfrak{F}_s) \\ &= e^{-rt} E_Q(e^{-r(T-t)} U_T | \mathfrak{F}_s) = e^{-rs} U_s = U_s^*. \end{aligned}$$

Το φιλτράρισμα  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι το φυσικό φιλτράρισμα και της ανέλιξης  $W_t'$  διότι διαφέρει από την  $W_t$  μόνο κατά μια μη τυχαία ποσότητα. Επίσης, η  $W_t'$ , υπό το  $Q$ , είναι BM(0,1). Επομένως, από το Θεώρημα αναπαράστασης martingale θα υπάρχει μία  $\xi_t$  - προσαρμοσμένη ανέλιξη  $G_t$ ,  $t \in [0, T]$  τέτοια ώστε

$$U_t^* = U_0 + \int_0^t G_x dW_x', \quad t \in [0, T].$$

Αν τώρα κατασκευάσουμε το αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο έτσι ώστε να έχει αρχική αξία  $V_0$  ίση με  $U_0$ , ενώ στο χρόνο  $t \in [0, T]$  να περιέχει

$$\Delta_t = \frac{G_x}{\sigma S_x^*},$$

μετοχές τότε θα έχει παρούσα αξία στο χρόνο  $t$ ,

$$V_t^* = V_0 + \int_0^t \Delta_x \sigma S_x^* dW_x' = U_0 + \int_0^t \frac{G_x}{\sigma S_x^*} \sigma S_x^* dW_x' = U_0 + \int_0^t G_x dW_x' = U_t^*, \quad t \in [0, T].$$

και επομένως  $V_t = U_t$ ,  $t \in [0, T]$  (η ανέλιξη  $\psi_t$  καθορίζεται από την  $\Delta_t$  και το  $V_0$  διότι το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο). Άρα το παράγωγο έχει την ίδια αξία με το συγκεκριμένο δυναμικό χαρτοφυλάκιο στο χρόνο  $T$  λήξης του, και επομένως το παράγωγο προϊόν θα έχει την ίδια no-arbitrage αξία  $V_t = U_t$  με το χαρτοφυλάκιο αυτό για κάθε  $t \in [0, T]$ . Διαφορετικά υπάρχει μια στρατηγική αγοραπωλησιών που οδηγεί σε σίγουρο κέρδος – arbitrage: αγοράζουμε στο χρόνο  $t$  όποιο είναι φθηνότερο, το χαρτοφυλάκιο ή το παράγωγο και πωλούμε ανοικτά το ακριβότερο κλείνοντας την ανοικτή μας θέση στο χρόνο  $T$ .

(β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση  $W_t = W_t' - \Theta t$ , η τιμή  $S_t$  της μετοχής στο χρόνο  $t$  θα είναι

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t} = S_0 e^{\sigma(W'_t - \Theta t) + \mu t} = S_0 e^{\sigma(W'_t - \Theta t) + \mu t} = S_0 e^{\sigma W'_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t},$$

όπου η  $W'_t = W_t + \Theta t$  είναι BM(0,1) ως προς το μέτρο πιθανότητας  $Q$ . Επομένως, υπό το  $Q$ , η  $S_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown με μεταβλητότητα  $\sigma$  και τάση  $r - \sigma^2/2$ .  $\square$

Η  $S_t$ ,  $t \in [0, T] \sim Q$  GBM( $r - \sigma^2/2$ ,  $\sigma^2$ ) και επομένως,

$$E_Q(S_t) = e^{t((r - \frac{\sigma^2}{2}) + \frac{1}{2}\sigma^2)} = e^{rt}, t \in [0, T],$$

δηλαδή, υπό το  $Q$ , η μέση απόδοση της μετοχής είναι ίση με την απόδοση του ομολόγου. Όπως αιτιολογήσαμε και στο μοντέλο διακριτού χρόνου, αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει στο «πραγματικό κόσμο» διότι τότε δεν θα υπήρχε κανένα κίνητρο να επενδύσει κανείς σε μετοχές (αφού, αντίθετα από τις μετοχές, η επένδυση σε ομόλογα είναι χωρίς κίνδυνο). Ισότητα θα ίσχυε μόνο αν οι επενδυτές δεν ενδιαφέρονταν για τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν, δηλαδή ήταν «ουδέτεροι» απέναντι στον κίνδυνο. Για αυτό και το μέτρο  $P$  αναφέρεται και ως μέτρο πιθανότητας στον «πραγματικό κόσμο» ενώ το  $Q$  αναφέρεται ως μέτρο πιθανότητας σε ένα «κόσμο ουδέτερου ρίσκου» (risk neutral probability measure). Το μέτρο πιθανότητας  $Q$  είναι εικονικό και χρησιμοποιείται μόνο για να εκφράσουμε με απλούστερο τρόπο την τιμή ενός παραγώγου. Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι η no-arbitrage αξία ενός παραγώγου είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου.

Αν πάρουμε τώρα συγκεκριμένα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα μπορούμε να βρούμε έναν κλειστό τύπο για τη no-arbitrage αξία τους. Ξεκινάμε με ένα δικαίωμα αγοράς.

**Θεώρημα 6.1.2.** (Ο τύπος των Black and Scholes) Στο μοντέλο Black-Scholes(-Merton), η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς (call option, ευρωπαϊκού τύπου, με ημερομηνία λήξης  $T$ , τιμή εξάσκησης  $K$ ) στο χρόνο  $t$  είναι ίση με

$$c(t, S_t) = S_t \cdot \Phi(\omega) - e^{-r(T-t)} K \cdot \Phi(\omega - \sigma\sqrt{T-t}),$$

όπου  $\omega = \frac{r(T-t) + \sigma^2(T-t)/2 - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ ,  $\Phi$  είναι η συνάρτηση κατανομής της  $N(0,1)$ ,  $\sigma$  η μεταβλητότητα (volatility) της τιμής της υποκείμενης μετοχής και  $r$  το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς.

**Απόδειξη.** Από το προηγούμενο θεώρημα και από το γεγονός ότι ένα δικαίωμα αγοράς έχει αξία στη λήξη του ίση με  $U_T = (S_T - K)_+$ , θα είναι

$$c(t, S_t) = U_t = e^{-r(T-t)} E_Q((S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t),$$

όπου, υπό το μέτρο πιθανότητας  $Q$ , η  $S_t$ ,  $t \in [0, T]$ , ακολουθεί GBM( $r - \sigma^2/2$ ,  $\sigma^2$ ). Επίσης, οι ανεξάρτητες  $W_t$  και  $S_t$  έχουν το ίδιο φυσικό φιλτράρισμα (αν γνωρίζουμε την διαδρομή της μιας ξέρουμε και την διαδρομή της άλλης), δηλαδή,  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_x, x \leq t) = \sigma(S_x, x \leq t)$ . Άρα

$$c(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E_Q((S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} E_Q((S_T - K)_+ | S_x, x \leq t) = e^{-r(T-t)} E_Q((S_T - K)_+ | S_t).$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι, ως γεωμετρική κίνηση Brown, η ανέλιξη  $S_t$  έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Το γεγονός αυτό προκύπτει από το ότι οι τ.μ.  $S_x$ ,  $S_u/S_t$ ,  $x \leq t \leq u$ , είναι ανεξάρτητες (ιδιότητα της GBM), και επομένως η τιμή της  $S_T = (S_T/S_t) \cdot S_t$ , εξαρτάται μόνο από την  $S_t$  και την  $S_T/S_t$  που είναι ανεξάρτητη της διαδρομής  $S_x$ ,  $x \leq t$ .

Η παραπάνω μέση τιμή υπολογίζεται επακριβώς αφού  $S_t, t \in [0, T] \sim_Q \text{GBM}(r - \sigma^2/2, \sigma^2)$ , και επομένως η τ.μ.  $\ln(S_T / S_t) \sim_Q N((T-t)(r - \sigma^2/2), (T-t)\sigma^2)$ . Πράγματι, αν είμαστε στο χρόνο  $t$  με  $S_t = s$ , τότε (χρησιμοποιώντας και το ότι η τ.μ.  $S_T/S_t$  είναι ανεξάρτητη της  $S_t$ ),

$$c(t, s) = e^{-r(T-t)} E_Q((S_T \cdot \frac{S_T}{S_t} - K)_+ | S_t = s) = e^{-r(T-t)} E((s \cdot e^{(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma\sqrt{T-t}Z} - K)_+),$$

όπου με  $Z$  συμβολίζουμε μια τ.μ. που ακολουθεί την  $N(0,1)$ . Αν τώρα θέσουμε  $I(a > \beta) = 1$  αν  $a > \beta$  και 0 αν  $\beta \leq a$ , θα ισχύει γενικά για οποιαδήποτε  $a \neq 0, b$  ότι

$$\begin{aligned} E((e^{aZ+b} - K)_+) &= E((e^{aZ+b} - K)I(e^{aZ+b} > K)) = E(e^{aZ+b} I(e^{aZ+b} > K)) - E(K \cdot I(e^{aZ+b} > K)) \\ &= e^b E(e^{aZ} I(Z > \frac{\ln K - b}{a})) - K \cdot P(Z > \frac{\ln K - b}{a}) \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} E(e^{aZ} \cdot I(Z > x)) &= \int_x^\infty e^{az} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{e^{a^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{(z-a)^2}{2}} dz = \frac{e^{a^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-a}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= e^{a^2/2} (1 - \Phi(x-a)) = e^{a^2/2} \Phi(a-x), \end{aligned}$$

(όπου  $\Phi$  είναι η σ.κ. της  $N(0,1)$ ) και άρα

$$E((e^{aZ+b} - K)_+) = e^{b+a^2/2} \Phi(a - \frac{\ln K - b}{a}) - K \cdot \Phi(\frac{b - \ln K}{a}).$$

Με βάση τον παραπάνω γενικό τύπο προκύπτει τώρα άμεσα ότι

$$\begin{aligned} c(t, s) &= s \cdot e^{-r(T-t)} E((e^{(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma\sqrt{T-t}Z} - \frac{K}{s})_+) \\ &= s \cdot e^{-r(T-t)} (e^{(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2) + (\sigma\sqrt{T-t})^2/2} \Phi(\sigma\sqrt{T-t} - \frac{\ln \frac{K}{s} - (T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}) - \frac{K}{s} \cdot \Phi(\frac{(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2) - \ln \frac{K}{s}}{\sigma\sqrt{T-t}})) \\ &= s \cdot \Phi(\frac{r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \ln \frac{K}{s}}{\sigma\sqrt{T-t}}) - e^{-r(T-t)} K \cdot \Phi(\frac{(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2) - \ln \frac{K}{s}}{\sigma\sqrt{T-t}}) \end{aligned}$$

που ουσιαστικά αποτελεί τη ζητούμενη σχέση.  $\square$

Ο παραπάνω τύπος είναι γνωστός ως ο *τύπος των Black and Scholes* (B-S) και δόθηκε το 1973 από τους Fisher Black και Myron Scholes. Το παραπάνω μοντέλο που αναπτύχθηκε από τους συγκεκριμένους ερευνητές αποτελεί την κλασική μέθοδο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης. Ένα μεγάλο του πλεονέκτημα είναι ότι δεν χρειάζεται να υπολογιστεί η παράμετρος  $\mu$  της  $S_t$  διότι δεν περιέχεται στον τελικό τύπο.

**Παρατήρηση 6.1.1.** (Εύρεση της *no-arbitrage* αξίας ενός δικαιώματος πώλησης). Ένα δικαίωμα πώλησης (put option, Ευρωπαϊκού τύπου) έχει αξία στο χρόνο λήξης του ίση με  $(K - S_T)_+$ . Συνεπώς, από το Θεώρημα 6.1.1, η *no-arbitrage* τιμή του στο χρόνο  $t$  θα είναι

$$c_{put}(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E_Q((K - S_T)_+ | \mathcal{F}_t), \quad S_t, t \in [0, T] \sim_Q \text{GBM}(r - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2).$$

Παρατηρώντας τώρα ότι για οποιοδήποτε  $a$  ισχύει,  $a_+ - (-a)_+ = \max(a, 0) - \max(-a, 0) = a$ , θα είναι και  $(K - S_T)_+ - (S_T - K)_+ = K - S_T$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} c_{put}(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} E_Q((K - S_T)_+ | \mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} E_Q((S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t) + e^{-r(T-t)} E_Q(K - S_T | \mathcal{F}_t) \\ &= c_{call}(t, S_t) + e^{-r(T-t)} K - e^{rt} E_Q(e^{-rT} S_T | \mathcal{F}_t) = c_{call}(t, S_t) + e^{-r(T-t)} K - S_t, \end{aligned}$$

(όπου  $c_{\text{call}}(t,s)$  η no-arbitrage τιμή ενός call option από τον τύπο των B-S). Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι η ανέλιξη  $e^{-rt}S_t$ ,  $t \in [0,T]$  είναι Q-martingale.

**Παρατήρηση 6.1.2.** (Εύρεση της αξίας οποιουδήποτε παραγώγου Ευρωπαϊκού τύπου) Από την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.2 είναι φανερό ότι αν ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν (Ευρωπαϊκού τύπου) έχει αξία στο χρόνο λήξης του ίση με  $U_T = g(S_T)$  όπου  $g$  είναι κάποια συνάρτηση, τότε θα έχει no-arbitrage αξία στο χρόνο  $t$  με  $S_t = s$ ,

$$c_g(t,s) = e^{-r(T-t)} E_Q(g(S_T) | S_t = s) = e^{-r(T-t)} E_Q(g(S_t e^{\ln(S_T/S_t)}) | S_t = s) = e^{-r(T-t)} E_Q(g(s \cdot e^N)),$$

όπου η τ.μ.  $N = \ln(S_T / S_t) \sim_Q N((T-t)(r - \sigma^2/2), (T-t)\sigma^2)$ . Γενικότερα, αν ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν έχει αξία στο χρόνο λήξης του ίση με  $U_T = g(S_x, x \in [0,T])$ , δηλαδή η τιμή του στο  $T$  εξαρτάται από όλη την διαδρομή της τιμής της μετοχής στο  $[0,T]$  (π.χ. βλ. τα exotic options σε επόμενη παράγραφο) τότε όμοια, θα έχει no-arbitrage αξία στο  $t$ ,

$$c_g(t, \{S_x, x \in [0,T]\}) = e^{-r(T-t)} E_Q(g(S_x, x \in [0,T]) | S_x, x \leq t),$$

όπου (υπό το μέτρο πιθανότητας  $Q$ ), η  $S_t$ ,  $t \in [0,T]$  ακολουθεί GBM( $r - \sigma^2/2, \sigma^2$ ).

**Παρατήρηση 6.1.3.** (Εύρεση της αξίας call option Αμερικανικού τύπου). Η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου είναι ίση με την no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου. Αυτό συμβαίνει διότι η βέλτιστη στρατηγική που μπορεί να ακολουθήσει ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου είναι να το ασκήσει κατά την ημερομηνία λήξης του. Πράγματι, αν αποφασίσει να το ασκήσει σε χρόνο  $t < T$ , τότε θα έχει κέρδος  $S_t - K$ . Αντίθετα αν στο ίδιο χρόνο  $t$  πωλήσει ανοιχτά την υποκείμενη μετοχή (στην τιμή  $S_t$ ) και κλείσει την ανοιχτή του θέση στον χρόνο  $T$  με κόστος  $\min\{K, S_T\}$  (είτε ασκεί το δικαίωμα, είτε αγοράζει την μετοχή από την αγορά) τότε θα έχει κέρδος  $S_t - \min\{K, S_T\} \geq S_t - K$ .

**Παρατήρηση 6.1.4.** (Η αξία ενός put option Αμερικανικού τύπου). Αντίθετα με το δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου, η εξάσκηση ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου πριν την ημερομηνία λήξης του μπορεί να αποβεί σε όφελος. Συνεπώς το δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου θα αξίζει περισσότερο από το αντίστοιχο Ευρωπαϊκού τύπου. Η αξία αυτή δεν είναι εύκολο να δοθεί μέσα από έναν κλειστό τύπο. Για τον προσεγγιστικό προσδιορισμό του συνήθως χρησιμοποιούνται κατάλληλοι αναδρομικοί τύποι (σε αυτό το εισαγωγικό σύγγραμμα δεν παρουσιάζονται).

## 6.2. Εφαρμογή του τύπου των Black-Scholes στην πράξη.

Στην πράξη μπορεί κανείς να υπολογίσει την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης στο χρόνο  $t$  από τους τύπους που δόθηκαν παραπάνω χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες παραμέτρους:

(α) Η  $S_t$  είναι η τρέχουσα τιμή της υποκείμενου τίτλου, π.χ. μετοχής. Αφού βρισκόμαστε στο χρόνο  $t$  είναι γνωστή (π.χ. μπορεί να βρεθεί σε εφημερίδες ή καλύτερα στο διαδίκτυο).

(β) Η τιμή εξάσκησης  $K$  και ο χρόνος λήξης  $T$  (σε έτη) είναι εκ των προτέρων καθορισμένα και γνωστά.

(γ) Το επιτόκιο  $r$  των ομολόγων της αγοράς συνήθως υπολογίζεται με βάση τις τιμές των εντόκων γραμματίων του Δημοσίου με χρόνο λήξης περίπου ίσο με το χρόνο λήξης του παραγώγου (αν υπάρχουν δυο διαφορετικές τιμές, πώλησης και αγοράς, μπορεί να ληφθεί ο μέσος όρος τους). Αν π.χ. έχουμε ένα γραμμάτιο που λήγει μετά από 3 μήνες (92 ημέρες) με τιμή 98 ευρώ, και ονομαστική αξία 100 ευρώ τότε, θα πρέπει ( $t = 92/365 \approx 0.25$ ),

$$98e^{0.25r} = 100 \Rightarrow r = \frac{1}{0.25} \ln \frac{100}{98} \approx 0.081$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να πάρουμε ως  $r$  το μέσο όρο των διαπραπειαζικών επιτοκίων της αγοράς.

(δ) Η μεταβλητότητα (volatility)  $\sigma$  της τιμής της μετοχής μπορεί να εκτιμηθεί με διαφόρους τρόπους, μερικοί από τους οποίους είναι οι παρακάτω:

(i) *Εκτίμηση από ιστορικά δεδομένα.* Καταγράφονται οι τιμές κλεισίματος της υποκείμενης μετοχής, έστω  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , τις  $n$  τελευταίες ημέρες συναλλαγών. Το  $n$  δεν πρέπει να είναι ούτε πολύ μεγάλο (γιατί τότε μπορεί να μην παραμένει σταθερό το  $\sigma$ ) ούτε πολύ μικρό (γιατί τότε μπορεί να έχουμε μεγάλο σφάλμα στην εκτίμηση). Συνήθως λαμβάνεται  $n = 30$  με 180 ημέρες. Σύμφωνα με το μοντέλο B-S οι  $\tau$ .

$$X_i = \ln \frac{S_i}{S_{i+1}}, i = 1, 2, \dots, n-1,$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την  $N(\tau\mu, \tau\sigma^2)$  όπου  $\tau = 1/260$  (γίνονται περίπου 260 συνεδριάσεις το έτος). Επομένως πολύ απλά εκτιμούμε το  $\sigma^2$  από την δειγματική διασπορά των  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\tau} \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X})^2.$$

(ii) *Εκτίμηση από σταθμισμένα ιστορικά δεδομένα.* Όπως και στο (i) καταγράφονται οι τιμές κλεισίματος της υποκείμενης μετοχής τις  $n$  τελευταίες ημέρες συναλλαγών. Τώρα όμως δεν θεωρείται ότι έχουν όλες το ίδιο βάρος στην εκτίμηση του  $\sigma^2$  διότι αυτό μπορεί να μεταβάλλεται (ελαφρά) κατά τις  $n$  τελευταίες ημέρες και έτσι οι τιμές που είναι πιο πρόσφατες αντιστοιχούν σε  $\sigma^2$  που είναι πιο κοντά στο ζητούμενο (σημερινό). Τα βάρη μπορούν να εκλεγούν με διαφόρους τρόπους (π.χ. γραμμικά ή εκθετικά μεταβαλλόμενα).

(iii) *Εκτίμηση από τις τιμές των παραγώγων που διατίθενται ήδη στην αγορά – τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility).* Κατά την ημέρα που θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\sigma^2$ , θα διατίθενται ήδη στην αγορά παραγώγων και κάποια παράγωγα προϊόντα (π.χ. δικαιώματα αγοράς) επί της μετοχής της οποίας θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\sigma^2$  τα οποία θα έχουν γνωστή τιμή. Η τιμή αυτή συνήθως καθορίζεται με βάση παλαιότερη εκτίμηση του  $\sigma^2$  αλλά – πολύ σημαντικότερα – από την προσφορά και την ζήτηση του συγκεκριμένου δικαιώματος στην αγορά. Η τιμή επομένως διαμορφώνεται όχι μόνο με βάση τα ιστορικά δεδομένα, αλλά κυρίως από τις προσδοκίες των επενδυτών που αντικατοπτρίζουν πολύ μεγαλύτερη πληροφορία για την μελλοντική κίνηση της τιμής της μετοχής.

Αφού λοιπόν είναι γνωστή η τιμή ενός δικαιώματος στην αγορά, μπορούμε αντίστροφα, από τον τύπο των B-S να βρούμε το  $\sigma^2$  που αντιστοιχεί σε αυτή την τιμή. Η εκτίμηση του  $\sigma^2$  με αυτό τον τρόπο καλείται τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility). Μια δυσκολία εδώ είναι η αντιστροφή του τύπου των B-S η οποία μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μια επαναληπτική προσεγγιστική μέθοδο (π.χ. Newton – Raphson). Ένα άλλο πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι

ότι διαφορετικοί τύποι παραγώγων επί της συγκεκριμένης μετοχής μπορεί να οδηγούν σε διαφορετικό implied volatility. Ένας απλός τρόπος αντιμετώπισης αυτού είναι να πάρουμε το μέσο όρο (απλό ή κατάλληλα σταθμισμένο) των διαφορετικών εκτιμήσεων του  $\sigma^2$ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι έχουν προταθεί και άλλοι τρόποι εκτίμησης του  $\sigma^2$  που βασίζονται και σε ιστορικά δεδομένα ή τρέχουσες τιμές παραγώγων ή και τα δύο μαζί.

**Παράδειγμα 6.2.1.** Έστω ότι σήμερα (Ιανουάριος) σε μια αγορά παραγώγων γίνεται διαπραγμάτευση δικαιωμάτων αγοράς (Ευρωπαϊκού τύπου) επί της μετοχής AAA (θεωρούμε πάντα ότι η μετοχή δεν αποδίδει μέρισμα μέχρι την λήξη του παραγώγου). Η μετοχή AAA έχει σημερινή αξία στην αγορά ίση με 10 ευρώ. Συγκεκριμένα διατίθενται δικαιώματα αγοράς με ημερομηνία λήξης τον Μάρτιο ( $T - t = 80/365$ ), τον Μάιο ( $T - t = 140/365$ ) και τον Ιούλιο ( $T - t = 200/365$ ) με strike price  $K = 8, 9, 10, 11, 12$  ευρώ το καθένα, (δηλαδή  $3 \times 5 = 15$  διαφορετικά είδη). Αν το επιτόκιο  $r$  της αγοράς είναι ίσο με 0.05 και η μεταβλητότητα (volatility) της μετοχής έχει εκτιμηθεί ότι είναι  $\sigma = 0.2$ , τότε σύμφωνα με τον τύπο των B-S οι no-arbitrage τιμές των δικαιωμάτων αυτών θα είναι σε ευρώ, (για συμβόλαια π.χ. 100 μετοχών θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν επί 100)

| Strike price, K | Μήνας Παράδοσης |       |         |
|-----------------|-----------------|-------|---------|
|                 | Μάρτιος         | Μάιος | Ιούλιος |
| 8               | 2.088           | 2.162 | 2.240   |
| 9               | 1.143           | 1.267 | 1.383   |
| 10              | 0.428           | 0.590 | 0.727   |
| 11              | 0.098           | 0.212 | 0.322   |
| 12              | 0.0135          | 0.059 | 0.122   |

**Παρατήρηση 6.2.1.** Κλείνοντας, αξίζει να υπογραμμίζουμε κάτι που έχει ήδη υπονοηθεί και παραπάνω στο δ-(iii)). Η τιμή διάθεσης ενός παραγώγου στην αγορά μπορεί να είναι διαφορετική από την no-arbitrage τιμή του που καθορίζεται από τον τύπο των B-S (έχοντας εκτιμήσει τα  $r, \sigma^2$ ). Αυτό μπορεί να συμβαίνει για τους κάτωθι λόγους:

α) Για μικρές διαφορές της τιμής διάθεσης ενός δικαιώματος από την αντίστοιχη no-arbitrage τιμή, αν και θεωρητικά μπορεί να εφαρμοστεί στρατηγική που οδηγεί σε σίγουρο κέρδος (arbitrage), πρακτικά κάτι τέτοιο δεν εφικτό. Η εφαρμογή μιας τέτοιας στρατηγικής στην πράξη είναι ανέφικτη διότι, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, αφορά έναν εξιδανικευμένο παίκτη ο οποίος μπορεί να κάνει στιγμιαία συναλλαγές χωρίς κόστος.

β) Πολλοί επενδυτές μπορεί να μην συμφωνούν με την εκτίμηση του  $\sigma$  ή να προσδοκούν αλλαγή της τιμής του στο άμεσο μέλλον.

γ) Η no arbitrage τιμή του παραγώγου προκύπτει υποθέτοντας ότι η ανέλιξη  $S_t, t \in [0, T]$  είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown, κάτι που τις περισσότερες περιπτώσεις αποτελεί προσέγγιση αλλά όχι ακριβή περιγραφή της πραγματικότητας.

Γενικά, η τιμή ενός δικαιώματος στην αγορά εξαρτάται και από ποιοτικούς παράγοντες (π.χ. συγχωνεύσεις, εξαγορές και νέα στρατηγικά σχέδια εταιριών, ρευστότητα της αγοράς στους συγκεκριμένους τίτλους, ψυχολογία της αγοράς, απόδοση της αγοράς στο σύνολό της κ.α.). Παρόλα αυτά, η no-arbitrage τιμή που δίνεται από τον τύπο των B-S αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που δείχνει που περίπου μπορεί να κινηθεί η τιμή του παραγώγου στην αγορά.

### 6.3. Ιδιότητες της τιμής ενός δικαιώματος από τον τύπο των B-S

Είδαμε παραπάνω ότι ο η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς στο χρόνο  $t$  δίνεται από τον τύπο των Black and Scholes:

$$c(t, s) = e^{-r(T-t)} E_Q((s \cdot e^N - K)_+) = s \cdot \Phi(\omega) - e^{-r(T-t)} K \cdot \Phi(\omega - \sigma \sqrt{T-t}),$$

όπου  $\omega = \frac{r(T-t) + \sigma^2(T-t)/2 - \ln(K/s)}{\sigma \sqrt{T-t}}$ , ενώ αντίστοιχα ενός δικαιώματος πώλησης,

$$c_{put}(t, s) = e^{-r(T-t)} E_Q((K - s \cdot e^N)_+) = c(t, s) - s + K e^{-r(T-t)}.$$

με  $N \sim_Q N((T-t)(r - \sigma^2/2), (T-t)\sigma^2)$ . Έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε πως διαμορφώνεται η παραπάνω τιμή ενός δικαιώματος αγοράς (ή πώλησης) όταν μεταβάλλονται οι διάφορες παράμετροι του μοντέλου.

(α) Όταν αυξάνεται η τιμή  $s$  ( $= S_t$ ) της μετοχής στο χρόνο  $t$ , τότε η  $c(t, s)$  αυξάνεται (ενώ αντίθετα η  $c_{put}(t, s)$  μειώνεται). Μάλιστα η παράγωγος του  $c(t, s)$  ως προς  $s$  καλείται *παράμετρος Δέλτα* και είναι ίση με

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial s} c(t, s) = \Phi(\omega) = \Phi\left(\frac{r(T-t) + \sigma^2(T-t)/2 - \ln(K/s)}{\sigma \sqrt{T-t}}\right).$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, η τιμή της παραμέτρου *Δέλτα* χρησιμοποιείται για την κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης (αντιστάθμιση *Δέλτα*). Η δεύτερη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος αγοράς ως προς  $s$  καλείται *παράμετρος Γάμμα* και είναι ίση με

$$\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial s^2} c(t, s) = \frac{1}{\sigma s \sqrt{T-t}} \phi(\omega), \quad \phi = \Phi'.$$

Όπως φαίνεται είναι θετική και επομένως η  $c(t, s)$  είναι κυρτή ως προς  $s$ .

(β) Όταν αυξάνεται η τιμή εξάσκησης  $K$  του δικαιώματος, τότε η  $c(t, s)$  μειώνεται ενώ αντίθετα η  $c_{put}(t, s)$  αυξάνεται.

(γ) Όταν αυξάνεται ο χρόνος  $t$ , τότε η  $c(t, s)$  μειώνεται. Μάλιστα η παράγωγος της τιμής του δικαιώματος αγοράς ως προς  $t$  υπολογίζεται εύκολα ότι είναι ίση με

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial t} c(t, s) = -r K e^{-r(T-t)} \Phi(\omega - \sigma \sqrt{T-t}) - \frac{\sigma s}{2\sqrt{T-t}} \phi(\omega), \quad \phi = \Phi'.$$

Η ποσότητα αυτή καλείται *παράμετρος Θήτα* και όπως φαίνεται είναι πάντοτε αρνητική.

(δ) Όταν αυξάνεται το επιτόκιο  $r$ , τότε η  $c(t, s)$  αυξάνεται. Η παράγωγος της τιμής του δικαιώματος αγοράς ως προς  $r$  καλείται

$$\rho = \frac{\partial}{\partial r} c(t, s) = K(T-t) e^{-r(T-t)} \Phi(\omega - \sigma \sqrt{T-t}),$$

και αποτελεί ένα μέτρο ευαισθησίας της τιμής του δικαιώματος ως προς ενδεχόμενες αλλαγές του επιτοκίου της αγοράς.

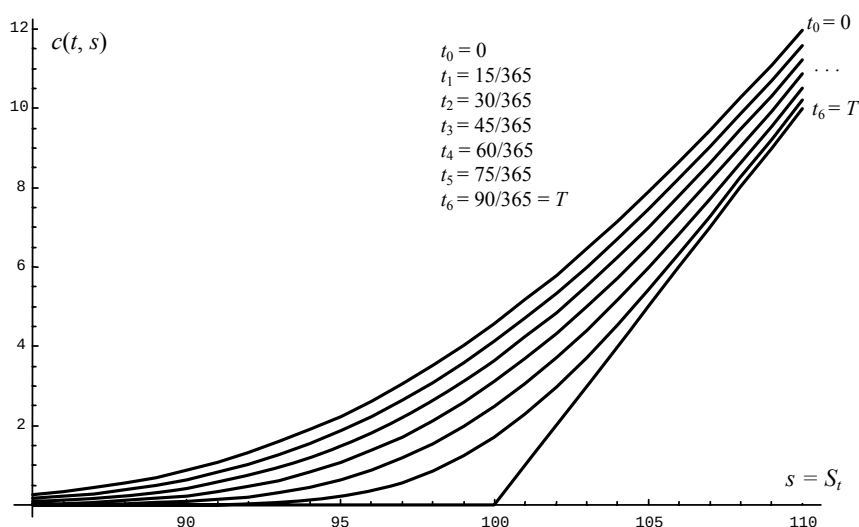
(ε) Όταν αυξάνεται το volatility  $\sigma$ , τότε η  $c(t, s)$  αυξάνεται. Η παράγωγος της τιμής του δικαιώματος αγοράς ως προς  $\sigma$  καλείται

$$Vega = \frac{\partial}{\partial \sigma} c(t, s) = s\sqrt{T-t} \cdot \phi(\omega)$$

και αποτελεί ένα μέτρο ευαισθησίας της τιμής του δικαιώματος ως προς ενδεχόμενες αλλαγές του  $\sigma$ .

Οι παράμετροι *Delta*, *Gamma*, *Theta*, *Rho*, *Vega* που εκφράζουν την ευαισθησία της τιμής ενός δικαιώματος ως προς τις ποσότητες από τις οποίες αυτή εξαρτάται, είναι γνωστές στη διεθνή βιβλιογραφία ως «*the Greeks*». Φυσικά, ορίζονται όχι μόνο για τα δικαιώματα αγοράς αλλά γενικότερα για οποιοδήποτε παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το γράφημα του  $c(t, s)$  για  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.20$ ,  $K = 100$ . Συγκεκριμένα απεικονίζεται το γράφημα της τιμής  $c(t, s)$  για  $s = S_t$  από 80 έως 110 και για  $t = t_0, t_1, \dots, t_6 = T$  (επτά «καμπύλες», μία για κάθε  $t$ ).



Παρατηρούμε ότι όσο το  $t$  πλησιάζει προς το  $T$  η τιμή  $c(t, s)$  του δικαιώματος αγοράς μειώνεται και πλησιάζει την τελική τιμή στον χρόνο λήξης:  $(S_T - K)_+$ . Επίσης παρατηρούμε ότι το  $c(t, s)$  αυξάνεται όσο αυξάνεται η τιμή της υποκείμενης μετοχής. Για τιμές της μετοχής in-the-money ( $S_t > K$ ) το δικαίωμα αγοράς είναι «ακριβότερο», ενώ αντίθετα όταν είναι out-of-the-money ( $S_t < K$ ) τότε το δικαίωμα αγοράς είναι «φθηνότερο».

#### 6.4. Στρατηγική εξασφάλισης Δέλτα (Delta Hedging)

Παραπάνω βρήκαμε την no-arbitrage τιμή ενός παραγώγου κατασκευάζοντας ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης που, στο χρόνο  $t$ , αποτελείται από  $\Delta_t$  μετοχές και  $\psi_t$  ομόλογα. Αν το  $\psi_t$  είναι θετικό έχουμε δανείσει (επενδύσει σε ομόλογα), αν είναι αρνητικό έχουμε δανειστεί (εκδώσει ομόλογα) το ποσό αυτό με επιτόκιο  $r$  (στο χρόνο  $t$  τα  $\psi_t$  ομόλογα έχουν αξία  $\psi_t \cdot e^{r''}$ ). Το χαρτοφυλάκιο αυτό έχει κάθε χρονική στιγμή  $t$  την ίδια αξία ( $V_t$ ) με το εξεταζόμενο παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν, δηλαδή,

$$c(t, S_t) = V_t = e^{r''} \psi_t + \Delta_t S_t,$$

όπου  $S_t$  η τιμή μετοχής στο χρόνο  $t$ . Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα αναπαράστασης martingale αποδείχθηκε ότι μπορεί πράγματι να κατασκευασθεί ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο χωρίς όμως να καθορίζουμε επακριβώς τη (δυναμική) σύνθεσή του (δηλαδή τα  $\Delta_t$ ,  $\psi_t$  για κάθε  $t$ ). Μπορεί όμως

να αποδειχθεί ότι η σύνθεση αυτού του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή  $t$  θα πρέπει να περιέχει

$$\Delta_t = \frac{\partial}{\partial S} c(t, S_t) = \Phi\left(\frac{r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \ln \frac{K}{S_t}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

μετοχές, δηλαδή το  $\Delta_t$  θα πρέπει να είναι ίσο με την παράμετρο Delta την χρονική στιγμή  $t$  (προφανώς η τιμή της θα είναι γνωστή στο χρόνο  $t$ , δηλ. είναι  $\mathcal{F}_t$  – μετρήσιμη). Η τιμή του  $\psi_t$  προκύπτει εύκολα από τον τύπο  $c(t, S_t) = e^{rt}\psi_t + \Delta_t S_t$ .

Το παραπάνω γεγονός συνάδει και με το αντίστοιχο αποτέλεσμα που αποδείξαμε στο διωνυμικό μοντέλο  $n$  περιόδων. Συγκεκριμένα είχαμε βρει ότι στο χρόνο  $t_{kh}$ , το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης θα πρέπει να αποτελείται από (βλ. Παρατήρηση 4.2.1.)

$$\Delta_{kh} = \frac{v_{(k+1)h}(S_{kh}e^{\sigma\sqrt{h}}) - v_{(k+1)h}(S_{kh}e^{-\sigma\sqrt{h}})}{S_{kh}e^{\sigma\sqrt{h}} - S_{kh}e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

και αν πάρουμε  $t = kh$ ,  $h \rightarrow 0$ ,

$$\Delta_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_t(S_t(1 + \sigma\sqrt{h})) - v_t(S_t(1 - \sigma\sqrt{h}))}{S_t \cdot 2\sigma\sqrt{h}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v_t(S_t + x) - v_t(S_t - x)}{2x} = \left. \frac{dv_t(s)}{ds} \right|_{s=S_t}$$

μετοχές, όπου  $v_t(s)$  είναι η αξία του παραγώγου όταν βρισκόμαστε στον χρόνο  $t$  και είναι γνωστό ότι  $S_t = s$ .

Επίσης το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και διαισθητικά αναλογιζόμενοι το εξής. Έστω ότι έχουμε στην κατοχή μας ένα δικαίωμα αγοράς (long call) στο χρόνο  $t$ , και έστω ότι μετά από μικρό χρονικό διάστημα  $\delta t$ , η τιμή της υποκείμενης μετοχής αυξάνεται (μειώνεται) κατά  $\delta s$ , με συνέπεια να αυξηθεί (μειωθεί) και η τιμή του δικαιώματος κατά  $\delta c$ . Επομένως, μετά από χρόνο  $\delta t$  θα έχουμε κέρδος (ζημία)  $\delta c$ . Επειδή ισχύει ότι

$$\Delta_t = \frac{\partial}{\partial S} c(t, S_t) \approx \frac{\delta c}{\delta s},$$

το κέρδος (ζημία) που θα έχουμε είναι περίπου ίση με  $\delta c \approx \Delta_t \delta s$ . Επομένως αν στο χρόνο  $t$  από το χαρτοφυλάκιο μας είχαν πωληθεί  $\Delta_t$  το πλήθος μετοχές, τότε θα είχαμε αντισταθμίσει πλήρως το κέρδος (ζημία) που θα είχαμε από το δικαίωμα (long position στο call απαιτεί short position στην μετοχή). Αντίθετα αν είχαμε λάβει μία θέση short call τότε θα έπρεπε στο χρόνο  $t$  να είχαμε στην κατοχή μας  $\Delta_t$  το πλήθος μετοχές (short position στο call απαιτεί long position στην μετοχή).

Επομένως, αν ένας επενδυτής έχει λάβει κάποια θέση (long ή short) σχετικά με ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης, τότε μπορεί να αντισταθμίσει αυτή του τη θέση κατασκευάζοντας ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Όπως είδαμε παραπάνω, το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι δυναμικό, δηλαδή θα πρέπει η σύνθεση του να αναπροσαρμόζεται κάθε χρονική στιγμή ώστε να είναι ίση με  $(\Delta_t, \psi_t)$  στο χρόνο  $t \in [0, T]$ . Στην πράξη αυτό δεν είναι εφικτό, αλλά μπορεί η αναπροσαρμογή να γίνεται κατά (όσο το δυνατόν μικρότερα) τακτά χρονικά διαστήματα οδηγώντας σε *προσεγγιστικό χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης*.

Αλλά ας δούμε πως μπορούμε στην πράξη να κατασκευάσουμε ένα προσεγγιστικό χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης για ένα short call. Χωρίζουμε το  $[0, T]$  σε  $n$  χρονικά διαστήματα μήκους

$h = T/n$  και αναπροσαρμόζουμε το χαρτοφυλάκιο έτσι ώστε στο χρόνο  $ih$  να αποτελείται από  $\psi_{ih}$  ομόλογα και  $\Delta_{ih}$  μετοχές. Όπως αναφέραμε θα πρέπει  $\Delta_{ih} = \text{Delta}$  που δίνεται από τον παραπάνω τύπο. Αφού πρόκειται για αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο θα πρέπει επίσης να ισχύει ότι  $\psi_{ih}e^{r_{ih}} + \Delta_{ih}S_{ih} = \psi_{(i-1)h}e^{r_{ih}} + \Delta_{(i-1)h}S_{ih}$  (προκύπτει από τη γνωστή σχέση  $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{S}'_i = \mathbf{x}_{i-1} \cdot \mathbf{S}'_i$  που είδαμε σε μοντέλα διακριτού χρόνου), και άρα το  $\psi_{ih}$  μπορεί να βρεθεί από την αναδρομική σχέση,

$$\psi_{ih} = \psi_{(i-1)h} - e^{-r_{ih}} (\Delta_{ih} - \Delta_{(i-1)h}) S_{ih}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

με αρχική τιμή  $\psi_0 = c(0, S_0) - \Delta_0 S_0$ , επειδή θα πρέπει να ισχύει ότι  $V_0 = \psi_0 e^0 + \Delta_0 S_0 = c(0, S_0)$ . Τα  $\psi_{ih}$  είναι αρνητικά και επομένως πρόκειται για δανεισμό του ποσού (έκδοση ομολόγων). Από όσα έχουμε αποδείξει παραπάνω, το χαρτοφυλάκιο αυτό θα πρέπει να έχει τελική τιμή (περίπου) ίση με την αξία ενός call option.

$$V_{nh} = e^{rT} \psi_{nh} + \Delta_{nh} S_{nh} = (S_T - K)_+.$$

Στην πράξη ίσως είναι βολικότερο να εργαστούμε λίγο διαφορετικά :

- Στο χρόνο  $t = 0$  αγοράζουμε  $\Delta_0$  μετοχές δανειζόμενοι ποσό  $\xi_0 = -\Delta_0 S_0$  (με επιτόκιο  $r$ ).
- Στο χρόνο  $t = h$  αγοράζουμε (ή πωλούμε αν είναι αρνητικό)  $\Delta_h - \Delta_0$  μετοχές (ώστε να καταλήξουμε με  $\Delta_h$ ). Έχουμε τώρα δανεισθεί ποσό  $\xi_h = \xi_0 e^{r^h} - (\Delta_h - \Delta_0) S_h$ .
- Στο χρόνο  $t = 2h$  αγοράζουμε (ή πωλούμε αν είναι αρνητικό)  $\Delta_{2h} - \Delta_h$  μετοχές (ώστε να καταλήξουμε με  $\Delta_{2h}$ ). Έχουμε τώρα δανεισθεί ποσό  $\xi_{2h} = \xi_h e^{r^h} - (\Delta_{2h} - \Delta_h) S_{2h}$ .

κ.ο.κ. ...

- Στο χρόνο  $t = nh = T$  αγοράζουμε (ή πωλούμε αν είναι αρνητικό)  $\Delta_{nh} - \Delta_{(n-1)h}$  μετοχές (ώστε να καταλήξουμε με  $\Delta_{nh}$ ). Έχουμε τώρα δανεισθεί ποσό  $\xi_{nh} = \xi_{(n-1)h} e^{r^h} - (\Delta_{nh} - \Delta_{(n-1)h}) S_{nh}$ .

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι  $\psi_{ih} = c(0, S_0) + e^{-r_{ih}} \xi_{ih}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , και επομένως η τελική αξία του χαρτοφυλακίου μας θα είναι

$$V_T = \xi_T + \Delta_T S_T = (\psi_T - c(0, S_0)) e^{rT} + \Delta_T S_T = -c(0, S_0) e^{rT} + (S_T - K)_+.$$

Συγκεκριμένα, με τη στρατηγική αυτή στο χρόνο  $T$ ,

- Αν  $S_T > K$ , θα έχουμε 1 μετοχή και θα χρωστάμε ποσό  $-c(0, S_0) e^{rT} - K$  (περίπου).
- Αν  $S_T \leq K$ , θα έχουμε 0 μετοχές και θα χρωστάμε ποσό  $-c(0, S_0) e^{rT}$  (περίπου).

Άρα με τη στρατηγική αυτή είναι σαν να έχουμε λάβει μια long call θέση καταβάλλοντας ποσό  $c(0, S_0)$  στο χρόνο 0 (και επομένως  $c(0, S_0) e^{rT}$  στο χρόνο  $T$ ) με απόδοση  $(S_T - K)_+$  στο χρόνο  $T$ . Αν έχουμε επομένως λάβει μία short call θέση τότε με την παραπάνω στρατηγική (σχεδόν) αντισταθμίζουμε οποιοδήποτε ζημιά ή κέρδος. Η αντιστάθμιση βελτιώνεται όταν αυξάνουμε το πλήθος  $n$  των αναπροσαρμογών του χαρτοφυλακίου. Είναι προφανές ότι μπορεί κανείς να ακολουθήσει ανάλογη στρατηγική χωρίζοντας το  $[0, T]$  σε ανισομερή χρονικά τμήματα.

Η παραπάνω στρατηγική καλείται αντιστάθμιση Δέλτα (**Delta hedging**). Μία υψηλή τιμή του Γάμμα (που είναι η παράγωγος του Δέλτα ως προς την τιμή της μετοχής) υποδηλώνει ότι το Δέλτα είναι αρκετά ευαίσθητο στις αλλαγές της τιμής της μετοχής και ότι πρέπει να αναπροσαρμόζεται πιο συχνά το (προσεγγιστικό) χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Φυσικά όλα τα παραπάνω ισχύουν θεωρητικά, διότι στην πράξη υπάρχουν κόστη συναλλαγών που αυξάνουν το κόστος κατασκευής του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης ενώ επίσης μπορεί το volatility να μην παραμένει σταθερό.

Μία προσομοίωση Delta hedging για ένα call option με  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $K = 100$ ,  $S_0 = 100$ ,  $T = 90$  ημέρες ( $=90/365$ ) δίνεται στους παρακάτω πίνακες (η τιμή του  $\mu$  δεν επηρεάζει την στρατηγική). Αναπροσαρμόζουμε το χαρτοφυλάκιο κάθε 10 ημέρες ( $h = 10/365$ ,  $n = 9$ ).

|     | Χρόνος          | Τιμή Μετοχής | Πλήθος Μετοχών χαρτοφ.      | Μετοχές που πρέπει να αγορ. ή πωλ. | Κόστος αγορ. ή πωλ. μετοχών            | Αθροιστικό Κόστος<br>(Δανεισμός με επιτόκιο $r$ )       |
|-----|-----------------|--------------|-----------------------------|------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $i$ | $t = i \cdot h$ | $S_t$        | $\Delta_t = \text{Delta}_t$ | $\Delta_t - \Delta_{t-h}$          | $-(\Delta_t - \Delta_{t-h}) \cdot S_t$ | $\xi_t = \xi_{t-h} e^h - (\Delta_t - \Delta_{t-h}) S_t$ |
| 0   | 0/365           | 100.000      | 0.607616                    | 0.607616                           | -60.7616                               | -60.7616                                                |
| 1   | 10/365          | 100.660      | 0.654718                    | 0.0471023                          | -4.74134                               | -65.5862 = -60.7616 $\cdot e^h$ - 4.74134               |
| 2   | 20/365          | 101.985      | 0.754831                    | 0.100113                           | -10.21                                 | -75.8861 = -65.5862 $\cdot e^h$ - 10.21                 |
| 3   | 30/365          | 099.088      | 0.498892                    | -0.255939                          | 25.3607                                | -50.6295 = -75.8861 $\cdot e^h$ + 25.3607               |
| 4   | 40/365          | 100.199      | 0.601524                    | 0.102631                           | -10.2836                               | -60.9825 = -50.6295 $\cdot e^h$ - 10.2836               |
| 5   | 50/365          | 101.294      | 0.71577                     | 0.114247                           | -11.5724                               | -72.6385 = -60.9825 $\cdot e^h$ - 11.5724               |
| 6   | 60/365          | 099.718      | 0.52365                     | -0.19212                           | 19.1579                                | -53.5802 = -72.6385 $\cdot e^h$ + 19.1579               |
| 7   | 70/365          | 101.205      | 0.739036                    | 0.215385                           | -21.798                                | -75.4517 = -53.5802 $\cdot e^h$ - 21.798                |
| 8   | 80/365          | 103.181      | 0.976318                    | 0.237282                           | -24.4831                               | -100.038 = -75.4517 $\cdot e^h$ - 24.4831               |
| 9   | 90/365          | 102.232      | <b>1.</b>                   | 0.023682                           | -2.42106                               | <b>-102.596</b> = -100.038 $\cdot e^h$ - 2.42106        |

(Έχουμε θεωρήσει ότι το option είναι επί μιας μετοχής. Στην πράξη μπορεί να έχουμε options π.χ. επί 100 ή 1000 μετοχών, οπότε οι παραπάνω δεκαδικοί αριθμοί του  $\Delta_t$  θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν επί 100 ή 1000 κ.ο.κ.)

Όπως φαίνεται παραπάνω, στο χρόνο  $T$  θα κατέχουμε 1 μετοχή ενώ θα οφείλουμε ποσό 102.596. Επομένως στο χρόνο  $T$  θα έχουμε κέρδος  $S_T - K - 2.596$ . Εάν είχαμε λάβει long call θέση θα είχαμε καταβάλει ποσό  $c(0, S_0) = 2.64167$  στο χρόνο 0, ενώ στο χρόνο  $T$  θα εξασκούσαμε το δικαίωμα (αφού τελικά είναι in-the-money) και θα είχαμε συνολικό κέρδος (στο χρόνο  $T$ ) ίσο με  $S_T - K - 2.67444$  ( $2.67444 \approx 2.64167 \cdot e^{rT}$ ). Παρατηρούμε ότι το χαρτοφυλάκιο έχει σχεδόν την ίδια τελική αξία με το δικαίωμα αγοράς. Εάν είχαμε λάβει short call θέση και ταυτόχρονα κατασκευάζαμε το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης θα είχαμε σχεδόν μηδενικό τελικό κέρδος (σχεδόν πλήρης αντιστάθμιση). Προφανώς, εάν είχαμε πάρει μικρότερο  $h$  (π.χ. 1 ημέρα) θα είχαμε ακριβέστερη αντιστάθμιση.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ακόμη μία προσομοίωση Delta hedging με τις ίδιες τιμές των παραμέτρων, αυτή τη φορά όμως η τιμή της μετοχής «τερματίζει» κάτω από το  $K$ .

|     | Χρόνος          | Τιμή Μετοχής | Πλήθος Μετοχών χαρτοφ.      | Μετοχές που πρέπει να αγορ. ή πωλ. | Κόστος αγορ. ή πωλ. μετοχών            | Αθροιστικό Κόστος<br>(Δανεισμός με επιτόκιο $r$ )       |
|-----|-----------------|--------------|-----------------------------|------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $i$ | $t = i \cdot h$ | $S_t$        | $\Delta_t = \text{Delta}_t$ | $\Delta_t - \Delta_{t-h}$          | $-(\Delta_t - \Delta_{t-h}) \cdot S_t$ | $\xi_t = \xi_{t-h} e^h - (\Delta_t - \Delta_{t-h}) S_t$ |
| 0   | 0/365           | 100          | 0.607616                    | 0.607616                           | -60.7616                               | -60.7616                                                |
| 1   | 10/365          | 97.9003      | 0.422393                    | -0.185223                          | 18.1333                                | -42.7115 = -60.7616 $\cdot e^h$ + 18.1333               |
| 2   | 20/365          | 95.195       | 0.18846                     | -0.233933                          | 22.2692                                | -20.5008 = -42.7115 $\cdot e^h$ + 22.2692               |
| 3   | 30/365          | 94.6433      | 0.128205                    | -0.0602549                         | 5.70272                                | -14.8262 = -20.5008 $\cdot e^h$ + 5.70272               |
| 4   | 40/365          | 96.152       | 0.19582                     | 0.0676145                          | -6.50127                               | -21.3478 = -14.8262 $\cdot e^h$ - 6.50127               |
| 5   | 50/365          | 97.585       | 0.288966                    | 0.093146                           | -9.08965                               | -30.4667 = -21.3478 $\cdot e^h$ - 9.08965               |
| 6   | 60/365          | 99.1964      | 0.450755                    | 0.16179                            | -16.0489                               | -46.5574 = -30.4667 $\cdot e^h$ - 16.0489               |
| 7   | 70/365          | 101.528      | 0.781264                    | 0.330508                           | -33.5558                               | -80.1770 = -46.5574 $\cdot e^h$ - 33.5558               |
| 8   | 80/365          | 99.2565      | 0.35948                     | -0.421784                          | 41.8648                                | -38.4221 = -80.1770 $\cdot e^h$ + 41.8648               |
| 9   | 90/365          | 99.4853      | <b>0</b>                    | -0.35948                           | 35.763                                 | <b>-2.71182</b> = -38.4221 $\cdot e^h$ + 35.763         |

Τώρα, στο χρόνο  $T$  θα κατέχουμε 0 μετοχές ενώ θα οφείλουμε ποσό 2.71182. Επομένως στο χρόνο  $T$  θα έχουμε κέρδος (ζημία αφού είναι  $< 0$ )  $-2.71182$ . Εάν είχαμε λάβει long call θέση θα είχαμε καταβάλει ποσό  $c(0, S_0) = 2.64167$  (στο χρόνο 0), ενώ στο χρόνο  $T$  θα δεν εξασκούσαμε το δικαίωμα και θα είχαμε συνολικό κέρδος (στο χρόνο  $T$ ) ίσο με  $-2.67444 \approx -2.64167 \cdot e^{rT}$ .

Παρατηρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση είχαμε μια ικανοποιητική αντιστάθμιση μιας short call θέσης.

**Παρατήρηση 6.4.1.** Τα παραπάνω ισχύουν για τίτλους με συμπεριφορά παρόμοια με αυτήν που προϋποθέτει το μοντέλο (κυρίως ισχύουν για μετοχές χωρίς μέρισμα ή δείκτες μετοχών). Εάν ένα δικαίωμα είναι επί ενός τίτλου με διαφορετική συμπεριφορά (π.χ. μετοχές με μέρισμα, συνάλλαγμα, ομόλογα κ.α.) θα πρέπει να υπάρξει διαφορετική αντιμετώπιση (κατάλληλη τροποποίηση της παραπάνω διαδικασίας).

## 6.5. Διάφορες παραλλαγές δικαιωμάτων προαίρεσης (exotic options)

Εκτός από τα συνήθη δικαιώματα προαίρεσης που περιγράφηκαν παραπάνω (τα οποία μερικές φορές καλούνται και *vanilla options*), τα τελευταία χρόνια έχουν αρχίσει να προσελκύουν το ενδιαφέρον των επενδυτών δικαιώματα προαίρεσης με διαφορετικούς όρους τα οποία είναι γνωστά ως *exotic options*. Κυριότερα exotic options είναι:

1. **Barrier options.** Αυτά τα δικαιώματα θεωρούνται ισχύοντα ή μη ισχύοντα («alive» ή «killed») ανάλογα με το αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου (π.χ. μετοχή) από τον χρόνο αγοράς 0 μέχρι τον χρόνο  $T$  εξάσκησης του δικαιώματος περάσει ή όχι ένα δεδομένο φράγμα (barrier). Υπάρχουν 4 υποκατηγορίες:

- *down-and-in*: θεωρούνται alive και μπορούν να εξασκηθούν μόνο όταν η τιμή της μετοχής περάσει κάτω από ένα προκαθορισμένο φράγμα  $u$  ( $u < S_0$ ) μέχρι το χρόνο εξάσκησης  $T$ .
- *down-and-out*: θεωρούνται dead και δεν μπορούν να εξασκηθούν όταν η τιμή της μετοχής περάσει κάτω από ένα προκαθορισμένο φράγμα  $u$  ( $u < S_0$ ) μέχρι το χρόνο εξάσκησης  $T$ .
- *up-and-in*: θεωρούνται alive και μπορούν να εξασκηθούν μόνο όταν η τιμή της μετοχής περάσει πάνω από ένα προκαθορισμένο φράγμα  $u$  ( $u > K$ ) μέχρι το χρόνο εξάσκησης  $T$ .
- *up-and-out*: θεωρούνται dead και δεν μπορούν να εξασκηθούν όταν η τιμή της μετοχής περάσει πάνω από ένα προκαθορισμένο φράγμα  $u$  ( $u > K$ ) μέχρι το χρόνο εξάσκησης  $T$ .

Συνήθως, η τιμή της μετοχής συγκρίνεται με το  $u$  μόνο κατά το τέλος της συνεδρίασης κάθε ημέρα.

2. **Asian options.** Η αξία αυτών των δικαιωμάτων εξαρτάται από την πορεία της τιμής της μετοχής μέχρι τον χρόνο εξάσκησής τους (από την τυχαία διαδρομή της ανέλιξης  $S_t$ ,  $t \in [0, T]$ ). Μία περίπτωση είναι η εξής: η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος  $K$  (strike prize) δεν είναι προκαθορισμένη, αλλά είναι ίση με τη μέση τιμή που είχε η μετοχή από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος μέχρι τον χρόνο εξάσκησης  $t$  (π.χ. μετρούμενη κατά το τέλος των συνεδριάσεων κάθε ημέρα).

3. **Lookback options.** Η αξία και αυτών των δικαιωμάτων εξαρτάται από την πορεία της τιμής της μετοχής μέχρι τον χρόνο εξάσκησής τους. Συγκεκριμένα, η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος  $K$  (strike prize) δεν είναι προκαθορισμένη, αλλά είναι ίση με την μικρότερη τιμή που είχε η μετοχή από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος μέχρι τον χρόνο εξάσκησης  $T$  (π.χ. μετρούμενη κατά το τέλος των συνεδριάσεων κάθε ημέρα).

Αν θεωρήσουμε το μοντέλο των B-S, η no-arbitrage τιμή  $U_t$  (στο χρόνο  $t$ ) των παραπάνω δικαιωμάτων δίνεται και πάλι από τον γενικό τύπο

$$U_t = e^{-r(T-t)} E_Q(U_T | \mathcal{F}_t) \quad t \in [0, T],$$

όπου, υπό το μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{Q}$ , η τιμή της μετοχής  $S_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι μία  $GBM(r - \sigma^2/2, \sigma^2)$ . Π.χ. ένα Lookback options έχει τελική αξία

$$U_T = (S_T - \inf\{S_x, x \in [0, T]\})_+$$

και επομένως θα έχει no-arbitrage τιμή στο χρόνο 0,

$$U_0 = e^{-rT} E_{\mathcal{Q}}((S_T - \inf\{S_x, x \in [0, T]\})_+), \quad S_t \sim_{\mathcal{Q}} GBM(r - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2).$$

Αντίστοιχα, ένα Asian option έχει τελική αξία

$$U_T = (S_T - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{iT/n})_+,$$

ενώ υπάρχουν και άλλες παραλλαγές Asian option με τελική αξία

$$U_T = (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{iT/n} - K)_+, \quad U_T = (S_T - \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt)_+, \quad U_T = (\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K)_+.$$

Επίσης, ένα down-and-in Barrier option θα έχει τελική αξία

$$U_T = (S_T - K)_+ I(\inf\{S_x, x \in [0, T]\} < u),$$

Κ.Ο.Κ.

Σε μερικές από τις παραπάνω περιπτώσεις μπορεί να βρεθεί αναλυτικός τύπος για την τιμή τους (π.χ. Lookback, Barrier) αν και αρκετά πιο σύνθετος από αυτόν που αντιστοιχεί στα call options, ενώ σε άλλες δεν έχει βρεθεί (μέχρι τώρα) αναλυτικός τύπος και η τιμή τους μπορεί να βρεθεί μόνο προσεγγιστικά (π.χ. στις διάφορες παραλλαγές των Asian options).

## 6.6. Γενίκευση του μοντέλου των Black – Scholes θεωρώντας στοχαστική μεταβλητότητα (volatility), τάση (drift) και επιτόκιο

Σε αυτή την παράγραφο θα γενικεύσουμε το μοντέλο των Black – Scholes (– Merton) θεωρώντας ότι το volatility  $\sigma$ , το drift  $\mu$ , και το επιτόκιο  $r$  δεν είναι σταθερά στο  $[0, T]$  αλλά μεταβάλλονται με τυχαίο (ή μη) τρόπο, δηλαδή είναι στοχαστικές ανεξίτητες  $\sigma_t, \mu_t, r_t$  αντίστοιχα. Για να είναι εφικτή η αναλυτική αντιμετώπιση του προβλήματος θα θεωρήσουμε επιπλέον ότι οι  $\sigma_t, \mu_t, r_t$  είναι  $\mathcal{F}_t$  – μετρήσιμες, όπου  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι το φυσικό φιλτράρισμα της κίνησης Brown  $W_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Με άλλα λόγια θα υποθέσουμε ότι αν γνωρίζουμε την διαδρομή της  $W_x$ ,  $x \in [0, t]$  μέχρι κάποιο  $t$ , τότε γνωρίζουμε και τις διαδρομές και των  $\sigma_x, \mu_x, r_x$  στο ίδιο διάστημα (οι  $\sigma_t, \mu_t, r_t$  «οδηγούνται» από την  $W_t$ ).

Έστω λοιπόν μια χρηματοοικονομική αγορά εξεταζόμενη στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$  για κάποιο δεδομένο  $T$ . Θα εργαστούμε και πάλι σε έναν χώρο  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Υποθέτουμε ότι στο χώρο αυτό έχουμε μια τυπική κίνηση Brown  $W_t$ ,  $t \in [0, T]$  με φυσικό φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_x, x \leq t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Όπως και στο μοντέλο Black – Scholes, θεωρούμε ότι στην αγορά αυτή διατίθενται οι παρακάτω τίτλοι :

**Ο τίτλος 1 (riskless asset).** Ένα ομόλογο επί μιας χρηματικής μονάδας (στο χρόνο 0). Όπως προαναφέραμε θα θεωρήσουμε ότι το επιτόκιο είναι μια στοχαστική ανέλιξη  $r_t$ ,  $t \in [0, T]$ , προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t$ . Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να επαληθεύσουμε (βλ. Παράγραφο 2.1.3.) ότι η επένδυση μιας χρηματικής μονάδας στο χρόνο 0 αποδίδει μετά από χρόνο  $t$ ,

ποσό  $\exp(\int_0^t r_x dx)$ . Επομένως, η παρούσα (προεξοφλημένη) αξία μιας χρηματικής μονάδας στο χρόνο  $t$  θα είναι

$$D_t^{-1} = e^{-\int_0^t r_x dx} \text{ (discount process)}$$

Από τον τύπο του Itô, για  $Y_t = \int_0^t r_x dx$ ,  $f(y) = e^{-y}$ , ισχύει ότι  $dD_t^{-1} = df(Y_t) = -e^{-Y_t} dY_t = -D_t^{-1} r_t dt$ .

**Ο τίτλος 2 (risky asset).** Μια μετοχή (π.χ. AAA) η οποία στο χρόνο  $t$  έχει αξία  $S_t$ . Στο μοντέλο B-S θεωρήσαμε ότι η στοχαστική ανάλιξη  $S_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown (με αρχική τιμή  $S_0$ ), δηλαδή  $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}$  και επομένως ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2) S_t dt,$$

με σταθερά  $\mu, \sigma$ . Τώρα θα θεωρήσουμε ότι η  $S_t$  ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dS_t = \sigma_t S_t dW_t + (\mu_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2) S_t dt,$$

όπου  $\mu_t, \sigma_t, t \in [0, T]$  είναι στοχαστικές ανελίξεις προσαρμοσμένες στην  $\mathcal{F}_t$ . Η  $S_t$  είναι μία ανάλιξη Itô και είναι εύκολο να δούμε τώρα ότι

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t \sigma_x dW_x + \int_0^t \mu_x dx}.$$

Πράγματι, αν πάρουμε την ανάλιξη Itô,  $Y_t = \int_0^t \sigma_x dW_x + \int_0^t \mu_x dx$  τότε  $S_t = S_0 e^{Y_t}$ . Αν  $f(t, x) = e^x$  τότε ο τύπος του Itô

$$df(t, Y_t) = f^{(0,1)}(t, Y_t) dY_t + f^{(1,0)}(t, Y_t) dt + \frac{1}{2} f^{(0,2)}(t, Y_t) H_t^2 dt$$

δίνει  $de^{Y_t} = e^{Y_t} dY_t + \frac{1}{2} e^{Y_t} \sigma_t^2 dt = e^{Y_t} (\sigma_t dW_t + \mu_t dt) + \frac{1}{2} e^{Y_t} \sigma_t^2 dt$  και άρα

$$dS_t = S_t (\sigma_t dW_t + \mu_t dt) + \frac{1}{2} S_t \sigma_t^2 dt.$$

**Ο τίτλος 3 (derivative).** Ένα απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου με χρόνο λήξης  $T$  (επί της μετοχής AAA). Ως ένα τέτοιο παράγωγο θεωρείται μία τ.μ.  $U_T$  που είναι  $\mathcal{F}_T$ -μετρήσιμη (η τ.μ.  $U_T$  εκφράζει την αξία του παραγώγου στο χρόνο  $T$ ).

Το πρόβλημα που καλούμαστε και πάλι να αντιμετωπίσουμε είναι η εύρεση της αξίας του παραγώγου σε χρόνο  $t \in [0, T]$ . Θα ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα που κάναμε στο μοντέλο B-S μόνο που τώρα θα πρέπει να υπάρξουν κάποιες διαφοροποιήσεις γιατί τα  $\sigma, \mu, r$  δεν είναι σταθερά. Θα κατασκευάσουμε και πάλι ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με τελική αξία ίση με την αξία του παραγώγου  $U_T$  στο χρόνο εξάσκησης  $T$ . Έστω λοιπόν ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που στο χρόνο  $t$  αποτελείται από  $\psi_t$  ομόλογα και  $\Delta_t$  μετοχές, δηλαδή  $\mathbf{x}_t = (\psi_t, \Delta_t)$ . Η αξία του στο χρόνο  $t$  θα είναι

$$V_t = D_t \psi_t + \Delta_t S_t,$$

και επειδή το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο θα ισχύει επίσης (όμοια με το μοντέλο B-S) ότι

$$dV_t = D_t \psi_t r_t dt + \Delta_t dS_t.$$

Συμβολίζουμε και πάλι με  $V_t^* = D_t^{-1} V_t$  και με  $S_t^* = D_t^{-1} S_t$  την παρούσα (προεξοφλημένη) αξία του χαρτοφυλακίου και της υποκείμενης μετοχής στο χρόνο  $t$  αντίστοιχα. Το επόμενο λήμι-

μα αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου λήμματος που αποδείχθηκε για το μοντέλο B-S και αποδεικνύεται παρόμοια (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

**Λήμμα 6.6.1.** Η προεξοφλημένη αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο  $t$  δίνεται από τη σχέση

$$V_t^* = V_0 + \int_0^t \Delta_x \sigma_x S_x^* dW'_x,$$

$$\text{όπου } W'_t = W_t + \int_0^t \Theta_x dx, \text{ με } \Theta_x = \frac{\mu_x - r_x + \frac{1}{2} \sigma_x^2}{\sigma_x}.$$

Το βασικό θεώρημα της παραγράφου είναι το επόμενο το οποίο ουσιαστικά γενικεύει το αντίστοιχο θεώρημα που αποδείχθηκε στο μοντέλο B-S. Η απόδειξη παρότι είναι παρόμοια, περιλαμβάνεται παρακάτω διότι παρουσιάζει κάποιες επιπλέον τεχνικές δυσκολίες.

**Θεώρημα 6.6.1.** (*risk neutral pricing formula*) Στο γενικευμένο μοντέλο Black-Scholes: Αν ένα απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν (Ευρωπαϊκού τύπου) με χρόνο λήξης  $T$  έχει τελική αξία  $U_T$  τότε στο χρόνο  $t$  θα έχει no-arbitrage αξία

$$U_t = E_Q(e^{-\int_t^T r_s dx} U_T | \mathfrak{F}_t) \quad t \in [0, T],$$

$$\text{όπου το μέτρο } Q: Q(A) = E_P(Z_T \cdot I_A), A \in \mathfrak{F}, Z_t = \exp(-\int_0^t \Theta_x dW_x - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_x^2 dx), \Theta_x = \frac{\mu_x - r_x + \frac{1}{2} \sigma_x^2}{\sigma_x}.$$

**Απόδειξη.** Από το Θεώρημα Girsanov, η ανέλιξη Itô

$$W'_t = W_t + \int_0^t \Theta_x dx, \text{ όπου } \Theta_x = \frac{\mu_x - r_x + \frac{1}{2} \sigma_x^2}{\sigma_x},$$

είναι κίνηση Brown (BM(0,1)) ως προς το  $Q$  που περιγράφεται παραπάνω. Επομένως η

$$V_t^* = V_0 + \int_0^t \Delta_x \sigma_x S_x^* dW'_x, \quad t \in [0, T],$$

θα είναι  $Q$  - martingale και άρα  $V_t^* = E_Q(V_T^* | \mathfrak{F}_t)$ , από όπου προκύπτει ότι

$$V_t = e^{\int_0^t r_s dx} E_Q(e^{-\int_0^T r_s dx} V_T | \mathfrak{F}_t) = E_Q(e^{-\int_t^T r_s dx} V_T | \mathfrak{F}_t), \quad t \in [0, T].$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι η τ.μ.  $\exp(\int_0^t r_s dx)$  είναι  $\mathfrak{F}_t$  - μετρήσιμη.

Ορίζουμε την ανέλιξη  $U_t = E_Q(e^{-\int_t^T r_s dx} U_T | \mathfrak{F}_t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Θα κατασκευάσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με αξία  $V_t$  στο χρόνο  $t$ , έτσι ώστε  $V_t = U_t$ ,  $t \in [0, T]$ .

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η ανέλιξη  $U_t^* = D_t^{-1} U_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι  $Q$ -martingale ως προς την ιστορία  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Από το γεγονός αυτό προκύπτει ότι και η ανέλιξη  $M_t = U_t^* Z_t$  είναι  $P$ -martingale. Πράγματι, από τη σχέση  $Z_s E_Q(Y | \mathfrak{F}_s) = E_P(Y \cdot Z_t | \mathfrak{F}_s)$  (που ισχύει για κάθε  $\mathfrak{F}_t$ -μετρήσιμη τ.μ.  $Y$ , βλ. Παράγραφο 5.8), θα είναι

$$E_P(U_t^* Z_t | \mathfrak{F}_s) = Z_s E_Q(U_t^* | \mathfrak{F}_s) = Z_s U_s^*, \quad s < t.$$

Η ανέλιξη  $M_t = U_t^* Z_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι  $P$  - martingale ως προς την ιστορία  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , που παράγεται από την  $W_t$ ,  $t \in [0, T]$ , και επομένως, από το Θεώρημα αναπαράστασης martingale υπάρχει μία  $\mathfrak{F}_t$ -προσαρμοσμένη ανέλιξη  $G_t$ ,  $t \in [0, T]$  τέτοια ώστε

$$M_t = M_0 + \int_0^t G_x dW_x, \quad t \in [0, T],$$

και άρα  $dM_t = G_t dW_t$ . Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι  $U_t^* = M_t / Z_t$  και επομένως

$$dU_t^* = d\left(M_t \frac{1}{Z_t}\right) = \frac{1}{Z_t} dM_t + M_t d\frac{1}{Z_t} + dM_t d\frac{1}{Z_t}.$$

Από το λήμμα του Itô αποδεικνύεται τώρα εύκολα ότι  $d(1/Z_t) = \frac{\Theta_t}{Z_t} dW_t + \frac{\Theta_t^2}{Z_t} dt$  και άρα

$$dU_t^* = \left(\frac{G_t}{Z_t} + \frac{M_t \Theta_t}{Z_t}\right) (dW_t + \Theta_t dt) = \left(\frac{G_t}{Z_t} + \frac{M_t \Theta_t}{Z_t}\right) dW_t' \equiv G_t' dW_t'.$$

Δηλαδή, η  $U_t^*$  έχει την αναπαράσταση,

$$U_t^* = U_0 + \int_0^t G_x' dW_x',$$

όπου η  $G_t'$  είναι μια ανέλιξη προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Αν τώρα κατασκευάσουμε το αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο έτσι ώστε να έχει αρχική αξία  $U_0$ , ενώ στο χρόνο  $t \in [0, T]$  να περιέχει  $\Delta_x = G_x' / (\sigma_x S_x^*)$  μετοχές τότε θα έχει παρούσα αξία

$$V_t^* = V_0 + \int_0^t \Delta_x \sigma_x S_x^* dW_x' = U_0 + \int_0^t \frac{G_x'}{\sigma_x S_x^*} \sigma_x S_x^* dW_x' = U_0 + \int_0^t G_x' dW_x' = U_t^*, \quad t \in [0, T].$$

και επομένως  $V_t = U_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Άρα το παράγωγο έχει την ίδια αξία με το συγκεκριμένο δυναμικό χαρτοφυλάκιο στο χρόνο  $T$  λήξης του, και επομένως το παράγωγο θα έχει την ίδια no-arbitrage αξία με το χαρτοφυλάκιο αυτό για κάθε  $t \in [0, T]$ . □

**Παρατήρηση 6.6.1.** Στο συγκεκριμένο μοντέλο, η τιμή  $S_t$  της μετοχής στο χρόνο  $t$  δίνεται από τη σχέση

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t \sigma_x dW_x + \int_0^t \mu_x dx}$$

και επειδή  $dW_t = dW_t' - \frac{\mu_t - r_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2}{\sigma_t} dt$  προκύπτει ότι

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t \sigma_x dW_x' + \int_0^t (r_x - \frac{1}{2}\sigma_x^2) dx},$$

όπου η  $W_t'$  είναι κίνηση Brown ως προς το  $\mathcal{Q}$ . Δεν μπορούμε όπως τώρα να προχωρήσουμε περισσότερο και να βρούμε π.χ. τον ακριβή τύπο της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς διότι θα πρέπει να γνωρίζουμε την μορφή των ανελιξεων  $\sigma_t$ ,  $r_t$ ,  $\mu_t$  (όπως προαναφέρθηκε, θα πρέπει στο μοντέλο αυτό να εξαρτώνται από την ανέλιξη  $W_t$ ).

Κλείνοντας αξίζει να αναφέρουμε ότι, με σκοπό την καλύτερη περιγραφή της πραγματικότητας, έχουν προταθεί και πολλά άλλα μοντέλα εκτός του B-S και του γενικευμένου B-S τα οποία απαιτούν μία πιο σύνθετη αντιμετώπιση. Για παράδειγμα έχουν προταθεί μοντέλα, στα οποία η «τυχειότητα» μπορεί να οφείλεται σε περισσότερες από μία (συσχετισμένες) κινήσεις Brown. Επίσης έχουν προταθεί μοντέλα που προβλέπουν «άλματα» της τιμής του υποκείμενου τίτλου (Brownian motion and with jumps) που εμφανίζονται τυχαία π.χ. σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson.

### Ασκήσεις Κεφαλαίων 5 (παρ. 5.1 - 5.2) και 6 (παρ. 6.1 - 6.2)

**Άσκηση 1.** Αν μια στοχαστική ανέλιξη  $X_t, t \geq 0$  είναι κίνηση Brown με παράμετρο τάσης  $\mu$  και μεταβλητότητα  $\sigma$  (και  $X_0 = 0$ ), ποια κατανομή ακολουθούν οι τυχαίες μεταβλητές  $X_3, X_6 - X_4, X_7 - X_1$ . Είναι κάποιες από αυτές ανεξάρτητες μεταξύ τους και γιατί;

**Άσκηση 2.** Αν  $X_t, t \geq 0 \sim \text{BM}(0,1)$  τότε  $E(X_t X_s) = \min\{s, t\}$  για  $s \geq 0, t \geq 0$ .

**Άσκηση 3.** Αν η ανέλιξη της αξίας μιας μετοχής  $S_t, t \in [0, T]$  στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ ,  $T > 1$  (ο χρόνος μετράται σε έτη), περιγράφεται από μια γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους  $\mu = 0.3$  (drift) και  $\sigma = 0.1$  (volatility), να βρείτε την αναμενόμενη αξία της μετοχής στο χρόνο  $t = 3/12$  (τρεις μήνες) και την πιθανότητα να είναι μεγαλύτερη από 110 (σήμερα,  $t = 0$ , έχει αξία  $S_0 = 100$ ). Ποια είναι η αναμενόμενη αξία και η διασπορά της αξίας της μετοχής μετά από ένα χρόνο;

**Άσκηση 4.** Αν η ανέλιξη της αξίας μιας μετοχής  $S_t, t \in [0, T]$  στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ , (ο χρόνος μετράται σε έτη), περιγράφεται από μια γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους  $\mu = 0.5$  (drift) και  $\sigma = 0.2$  (volatility), να βρείτε την πιθανότητα να εξασκηθεί ένα δικαίωμα πώλησης ευρωπαϊκού τύπου επί της μετοχής αυτής με  $T = 6/12$  και  $K = 105$ . (σήμερα,  $t = 0$ , η μετοχή έχει αξία  $S_0 = 100$ ).

**Άσκηση 5.** Έστω ότι οι τιμές κλεισίματος μιας μετοχής AAA στο χρηματιστήριο τις τελευταίες 10 εβδομάδες είναι (σε ευρώ): 18.8, 19.4, 19.7, 18.9, 18.4, 17.9, 18.7, 19.4, 19.9, 19.3. Εκτιμήστε το volatility της μετοχής αυτής.

**Άσκηση 6.** Έστω ότι σήμερα γίνεται διαπραγμάτευση δικαιωμάτων αγοράς, Ευρωπαϊκού τύπου, επί 100 μετοχών AAA που περιγράφονται στην Άσκηση 5 (δεν αποδίδουν μέρισμα μέχρι το χρόνο  $T$ ). Η μετοχή AAA έχει σήμερα αξία στην αγορά ίση με 19.3 ευρώ. Συγκεκριμένα διατίθενται δικαιώματα αγοράς με ημερομηνία λήξης  $T = 3/12$  και  $T = 5/12$  και με strike price  $K = 18, 19, 20$  ευρώ το καθένα, (δηλαδή  $2 \times 3 = 6$  διαφορετικά είδη). Αν το επιτόκιο  $r$  της αγοράς είναι ίσο με 0.04, βρείτε τις no-arbitrage τιμές των δικαιωμάτων αυτών (εκτιμήστε την μεταβλητότητα  $\sigma$  από τα δεδομένα της Άσκησης 5).

**Άσκηση 7.** Συνέχεια της άσκησης 6: Βρείτε τις no-arbitrage τιμές των αντίστοιχων δικαιωμάτων πώλησης, Ευρωπαϊκού τύπου και δικαιωμάτων αγοράς Αμερικανικού τύπου.

**Άσκηση 8.** Μία εταιρία σκοπεύει να εκδώσει ένα παράγωγο επί μιας μετοχής AAA το οποίο μετά από χρόνο  $T$  αποδίδει ποσό  $\ln S_T$ . Η αξία  $S_t$  της μετοχής στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$  θεωρούμε ότι ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους  $\mu, \sigma^2$ . Ποια θα πρέπει να είναι η αξία του συγκεκριμένου παραγώγου στο χρόνο 0; (ώστε να μην δημιουργείται ευκαιρία για arbitrage).

**Άσκηση 9.** Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, μία εταιρία σκοπεύει να εκδώσει ένα παράγωγο επί μιας μετοχής AAA το οποίο μετά από χρόνο  $T$  αποδίδει ποσό  $S_T^2$ . Και πάλι, θεωρούμε ότι η αξία  $S_t$  της μετοχής στο  $[0, T]$  ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους  $\mu, \sigma^2$ . Ποια θα πρέπει να είναι τώρα η αξία του συγκεκριμένου παραγώγου στο χρόνο 0; (ώστε να μην δημιουργείται ευκαιρία για arbitrage).

**Άσκηση 10.** Βρείτε που συγκλίνει η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου (δηλ. ο τύπος των Black and Scholes) όταν πλησιάζουμε το χρόνο λήξης, δηλαδή όταν  $t \rightarrow T$ .

**Άσκηση 11.** Ένα δικαίωμα αγοράς, Ευρωπαϊκού τύπου, διατίθεται σήμερα στην τιμή των 5 ευρώ ενώ η τιμή της υποκείμενης μετοχής σήμερα είναι 30 ευρώ. Αν η τιμή εξάσκησης  $K$  είναι 25 ευρώ και το δικαίωμα λήγει μετά από 4 μήνες, εκτιμήστε (προσεγγιστικά) το volatility της υποκείμενης μετοχής (implied volatility). Θεωρήστε ότι το (ετήσιο) επιτόκιο της αγοράς είναι  $r = 0.04$ .