

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Κίνηση Brown – Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση

#### 5.1. Κίνηση Brown

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να μεταφράσουμε σε συνεχή χρόνο τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά τη μελέτη μοντέλων διακριτού χρόνου. Το πρώτο που πρέπει να περιγράψουμε είναι πως περίπου θα κινείται η τιμή του υποκείμενου τίτλου (π.χ. μετοχής) σε συνεχή χρόνο. Στο διωνυμικό μοντέλο  $n$  περιόδων είχαμε κάνει την παραδοχή ότι η τιμή αυτή μπορεί να κινείται μεταξύ διαδοχικών (διακριτών) χρονικών σημείων «πάνω» ή «κάτω» με κάποιες πιθανότητες. Αν συμβολίσουμε με  $S_t$  την τιμή της μετοχής στο χρόνο  $t$ , είχαμε ουσιαστικά υποθέσει ότι

$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h}b, & \text{με πιθαν. } p \\ S_{(i-1)h}a, & \text{με πιθαν. } 1-p \end{cases}$$

Κάτι απλό που μπορούμε τώρα να κάνουμε είναι να πάρουμε τώρα το  $h$  «πολύ μικρό» ώστε να προσεγγίσουμε ένα μοντέλο συνεχούς χρόνου.

Το παραπάνω μοντέλο είναι *πολλαπλασιαστικό*, δηλαδή  $S_{ih} = S_{(i-1)h}a$  ή  $S_{(i-1)h}b$ . Αν θεωρήσουμε την ανέλιξη  $X_t = \ln S_t$  τότε προκύπτει ένα απλούστερο *προσθετικό* μοντέλο,  $X_{ih} = X_{(i-1)h} + \ln a$  ή  $X_{(i-1)h} + \ln b$ . Ας ξεκινήσουμε με την μελέτη του προσθετικού μοντέλου από το οποίο όπως θα δούμε θα προκύψει φυσιολογικά και το *πολλαπλασιαστικό*. Έστω λοιπόν  $X_t$ ,  $t \geq 0$  μια στοχαστική ανέλιξη για την οποία ισχύει ότι

$$X_{ih} = \begin{cases} X_{(i-1)h} + c, & \text{με πιθαν. } p \\ X_{(i-1)h} + d, & \text{με πιθαν. } 1-p \end{cases}$$

Αν θέλουμε η  $X_t$  να μην παρουσιάζει «άλματα» σε απειροστά χρονικά διαστήματα θα πρέπει όταν  $h \rightarrow 0$  τότε και  $c, d \rightarrow 0$ . Επίσης είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το  $p$  θα είναι «κοντά» στο 0.5. Σε αντίθετη περίπτωση, αν π.χ. το  $p$  ήταν αρκετά μεγαλύτερο από το 0.5, τότε μέσα σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα η ανέλιξη  $X_t$  θα σημείωνε (με πιθανότητα  $\approx 1$ ) «δραματική» αύξηση («έκρηξη»). Αυτό θα συνέβαινε διότι μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα θα είχαμε πάρα πολλές μικρές μεταβολές της τιμής  $X_t$ , οι περισσότερες όμως από τις οποίες θα είναι ανοδικές. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, ένα αρκετά ενδιαφέρον μοντέλο προκύπτει αν υποθέσουμε ότι

$$X_{ih} = \begin{cases} X_{(i-1)h} + \sigma\sqrt{h}, & \text{με πιθαν. } p \\ X_{(i-1)h} - \sigma\sqrt{h}, & \text{με πιθαν. } 1-p \end{cases} \quad \text{όπου } p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{h} \right), i = 1, 2, \dots, n.$$

( $X_0 = 0$  ή  $x_0$ ) για κάποιες σταθερές παραμέτρους  $\mu$ ,  $\sigma$ . Θέτοντας  $Y_i = 1$  ή  $0$  ανάλογα με το αν η  $X$  αυξάνεται ή μειώνεται κατά το  $i$ -οστό χρονικό διάστημα, θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
X_t = X_{nh} &= \sigma\sqrt{h} \sum_{i=1}^n Y_i - \sigma\sqrt{h} \left( n - \sum_{i=1}^n Y_i \right) \stackrel{h=t/n}{=} 2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} \sum_{i=1}^n Y_i - n\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} \\
&= 2\sigma\sqrt{tp(1-p)} \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} + \sigma\sqrt{nt}(2p-1),
\end{aligned}$$

και αν πάρουμε  $n \rightarrow \infty$ , τότε θα ισχύει ότι (για την πρώτη σχέση χρησιμοποιούμε το από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, Κ.Ο.Θ.),

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \rightarrow_d N(0,1), \quad 2\sigma\sqrt{tp(1-p)} \rightarrow \sigma\sqrt{t}, \quad \sigma\sqrt{nt}(2p-1) = t\mu,$$

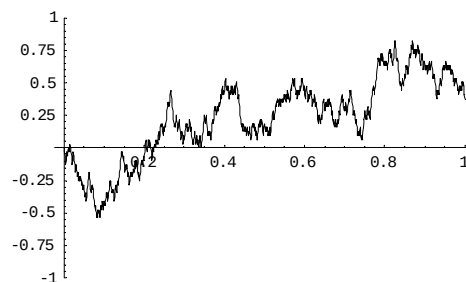
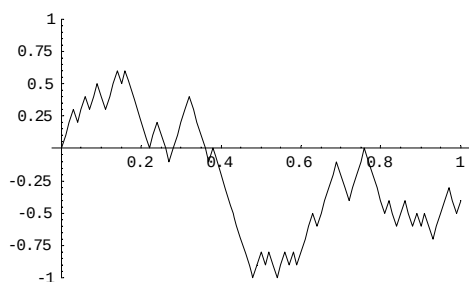
και άρα η κατανομή της  $X_t$  (όταν  $h \rightarrow 0$ ) είναι ίδια με την κατανομή μιας τ.μ. που έχει την μορφή

$$\sigma\sqrt{t} \cdot Z + t\mu \quad \text{όπου } Z \sim N(0,1)$$

δηλαδή,

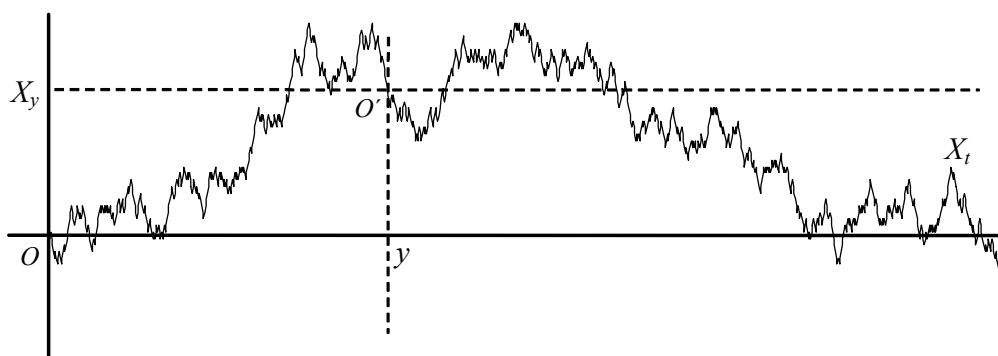
$$X_t \sim N(t\mu, t\sigma^2).$$

Δύο τυχαίες πραγματοποιήσεις της  $X_s$ ,  $s \in [0, t]$  (για  $n = 100$  και  $1000$ ) δίνονται στα ακόλουθα σχήματα ( $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ ).



Στα παραπάνω σχήματα δίνεται το γράφημα τυχαίων «διαδρομών» (paths) της  $X_s$ ,  $s \in [0, t]$ . Όπως έχουμε επισημάνει και παραπάνω, κάθε πραγματοποίηση της  $X_s$ ,  $s \in [0, t]$  μπορεί να θεωρηθεί ως η τυχαία συνάρτηση  $g_\omega(s) = X_s(\omega)$ ,  $s \in [0, t]$  για κάποιο  $\omega \in \Omega$ .

Είναι ενδιαφέρον ότι η ανέλιξη που προκύπτει θεωρώντας  $h \rightarrow 0$  έχει ανεξάρτητες και κανονικές προσανξήσεις  $X_{t+y} - X_y$ . Πράγματι, σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα, η αύξηση ή η μείωση της  $X_t$  είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν, και άρα η τ.μ.  $X_{t+y} - X_y$ ,  $t > 0$  θα είναι ανεξάρτητη από τις  $X_u$ ,  $0 \leq u \leq y$ . Επίσης είδαμε ότι  $X_t \sim N(t\mu, t\sigma^2)$  και επομένως και  $X_{t+y} - X_y \sim N(\mu t, t\sigma^2)$  για κάθε  $y \geq 0$ . Αυτό προκύπτει από την εξής παρατήρηση: αν μετά από χρόνο  $y$  πάρουμε ως αρχή των αξόνων το  $(y, X_y)$  (δηλ. το  $O'$  αντί του  $O$  στο παρακάτω σχήμα) τότε η ανέλιξη  $X'_t = X_{y+t} - X_y$ ,  $t > 0$  που ξεκινά από την νέα αυτή αρχή των αξόνων  $O'$  κινείται σύμφωνα με το ίδιο μοντέλο που κινείται και η  $X_t$  ξεκινώντας από το  $O$  και επομένως  $X'_t = X_{y+t} - X_y \sim N(t\mu, t\sigma^2)$ .



Αποδεικνύεται ότι πράγματι υπάρχει και μπορεί να οριστεί μια ανέλιξη με τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Ειδικότερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό που προκύπτει φυσιολογικά από τα παραπάνω.

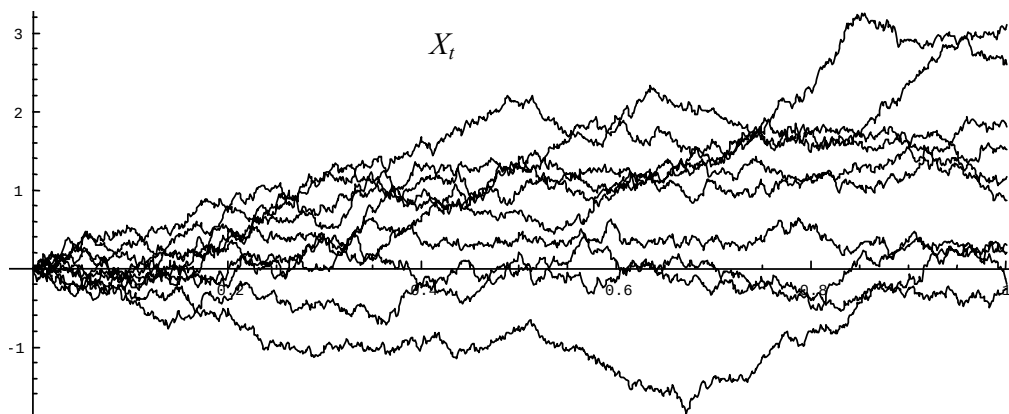
**Ορισμός 5.1.1.** Μία στοχαστική ανέλιξη  $X_t, t \geq 0$  (με τιμές στο  $R$ ) καλείται **κίνηση Brown** με παραμέτρους  $\mu \in R$  (τάση - drift parameter) και  $\sigma > 0$  (μεταβλητότητα - volatility) (συμβ.  $BM(\mu, \sigma^2)$ ) αν ισχύει ότι, για κάθε  $y \geq 0, t > 0$ ,

$$1) \text{ Η τ.μ. } X_{t+y} - X_y \sim N(\mu t, t\sigma^2).$$

$$2) \text{ Η τ.μ. } X_{t+y} - X_y, \text{ είναι ανεξάρτητη από τις } X_u, 0 \leq u \leq y \text{ (δηλ. ανεξ. της } \sigma(X_u, u \leq y)).$$

Συνήθως λαμβάνεται  $X_0 = 0$  (ή  $x_0$ ).

Παρακάτω δίνονται 10 τυχαίες διαδρομές (πραγματοποιήσεις) μιας κίνησης Brown με  $\mu = 1, \sigma = 1$  (για  $t \in [0, 1]$ )



π.χ. στο χρόνο  $t = 0.5$ , η τιμή  $X_{0.5}$  θα ακολουθεί  $N(0.5\mu, 0.5\sigma^2) = N(0.5, 0.5)$ , σε χρόνο  $t = 1$  η  $X_1$  θα ακολουθεί  $N(1\mu, 1\sigma^2) = N(1, 1)$  κ.ο.κ.

Η κίνηση Brown μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει πολλά φυσικά φαινόμενα. Έχει το όνομα του Άγγλου βοτανολόγου Robert Brown, ο οποίος πρώτος περιέγραψε (1827) την «ακανόνιστη» κίνηση ενός μικρού σώματος μέσα σε ένα υγρό ή αέριο. Ο Γερμανός φυσικός Albert Einstein έδειξε (1905) ότι η κίνηση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί θεωρώντας ότι το σωματίδιο «βομβαρδίζεται» από τα μόρια του υγρού ή του αερίου και για αυτό κινείται ακανόνιστα με «τυχαίο» τρόπο στο χώρο. Τέλος, ο Αμερικανός μαθηματικός Norbert Wiener όρισε αυστηρά και μελέτησε σε βάθος (1918) την ανέλιξη αυτή αποδεικνύοντας πολλές ιδιότητές της (για αυτό και η ανέλιξη είναι γνωστή και ως Wiener Process). Το παραπάνω σχήμα μπορεί να θεωρηθεί

ότι καταγράφει την τυχαία κίνηση 10 σωματιδίων κατά τη διάρκεια του χρόνου (σε μία διάσταση, που είναι στον κάθετο άξονα) που ξεκινάνε από το 0 στο χρόνο 0.

Αποδεικνύεται ότι η κίνηση Brown είναι η μοναδική στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο που (i) οι διαδρομές της  $g_\omega(t) = X_t(\omega)$  είναι *συνεχείς συναρτήσεις* και (ii) έχει *ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις*. Για παράδειγμα, οι προσαυξήσεις (τ.μ.)

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \quad X_{t_2} - X_{t_1}, \quad \dots, \quad X_{t_m} - X_{t_{m-1}},$$

είναι ανεξάρτητες και αν  $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_m - t_{m-1}$  είναι και ισόνομες. Το (i) δικαιολογείται διαισθητικά από το ότι η ανέλιξη  $X_t$  κάνει «άλματα» (πάνω ή κάτω) μήκους  $\sigma h^{1/2}$  σε χρονικό διάστημα μήκους  $h$ , δηλαδή το μέγεθος του άλματος συγκλίνει στο 0 όταν  $h \rightarrow 0$ .

**Παρατήρηση 5.1.1.** Θα μπορούσε κανείς σε αυτό το σημείο να αναρωτηθεί τι θα γινόταν αν υποθέταμε (κάτι που ίσως φαίνεται πιο φυσιολογικό με την πρώτη ματιά) ότι

$$X_{ih} = \begin{cases} X_{(i-1)h} + \sigma h, & \text{με πιθαν. } p \\ X_{(i-1)h} - \sigma h, & \text{με πιθαν. } 1-p \end{cases}$$

δηλαδή ότι οι προσαυξήσεις της ανέλιξης σε ένα διάστημα μήκους  $h$  είναι ανάλογες του  $h$  και όχι της ρίζας του  $h$ . Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να επαληθεύσουμε (από τον νόμο των μεγάλων αριθμών) ότι  $X_t = 0$  με πιθαν. 1 (λαμβάνοντας  $n \rightarrow \infty$ ), δηλαδή προκύπτει μια τετριμμένη περίπτωση. Επομένως οι απειροστές προσαυξήσεις θα πρέπει να μην είναι ανάλογες του μήκους  $h$  του διαστήματος, αλλά «αρκετά μεγαλύτερες». Παραπάνω θεωρήσαμε προσαυξήσεις ανάλογες του  $h^{1/2}$  που όταν  $h \rightarrow 0$  είναι πολύ μεγαλύτερες του  $h$ .

**Παρατήρηση 5.1.2.** Αν  $X_t, t \geq 0 \sim \text{BM}$ , η  $X_t$  αλλάζει απειροστά τιμή κάθε απειροστό χρονικό διάστημα και συνεπώς παρουσιάζει «ιδιάζουσες διαδρομές» (irregular paths). Συγκεκριμένα, μία πραγματοποίηση της στοχαστικής ανέλιξης  $X_t, t \geq 0$  (δηλ. η  $\{X_t(\omega), t \geq 0\}$  για κάποιο  $\omega \in \Omega$ ) είναι μία συνεχής συνάρτηση του  $t$  (δεν κάνει «άλματα») η οποία όμως δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη (σχεδόν για κάθε  $\omega \in \Omega$ ). Αυτό μπορεί διαισθητικά να γίνει φανερό και από τον τρόπο με τον οποίο «κατασκευάσαμε» την κίνηση Brown. Συγκεκριμένα θεωρήσαμε ότι σε κάθε «πολύ μικρό» διάστημα μήκους  $h$ , η ανέλιξη κινείται πάνω ή κάτω κατά  $\sigma h^{1/2}$ , δηλαδή η «παράγωγος» της στο διάστημα αυτό θα είναι ίση με  $\sigma h^{1/2}/h = \sigma h^{-1/2}$  η οποία συγκλίνει στο άπειρο όταν το  $h \rightarrow 0$ . Επιπλέον, η ανέλιξη αλλάζει τυχαία κλίση (πάνω ή κάτω) σε κάθε απειροστό διάστημα.

## 5.2. Η Γεωμετρική Κίνηση Brown

Αν και ο Γάλλος μαθηματικός Bachelier, στη διδακτορική του διατριβή το 1900, πρώτος χρησιμοποίησε την κίνηση Brown για να περιγράψει την εξέλιξη τιμών αγαθών ή μετοχών, η συγκεκριμένη ανέλιξη δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή τέτοιων φαινομένων διότι

(i) μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές, κάτι που δεν είναι αποδεκτό, ενώ

(ii) η αύξηση ή μείωση μιας τιμής είναι, σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, ανεξάρτητη από την ίδια την τιμή (π.χ. είναι το ίδιο πιθανό το ενδεχόμενο «η τιμή 100 να κινηθεί στο  $100+10=110$  σε διάστημα μήκους  $h$ » με το ενδεχόμενο «η τιμή 10 να κινηθεί στο  $10+10=20$  σε διάστημα μήκους  $h$ ») κάτι που δεν φαίνεται λογικό και δεν ταιριάζει σε πραγματικά δεδομένα. Αντίθετα, θα περι-

μενε κανείς η *ποσοστιαία* αύξηση ή μείωση της τιμής να είναι ανεξάρτητη από την τιμή (δηλαδή το 100 πάει στο  $100 \times 1.1 = 110$  με την ίδια πιθανότητα που το 10 πάει στο  $10 \times 1.1 = 11$ ).

Πράγματι, στο διωνυμικό μοντέλο είχαμε υποθέσει ότι η *ποσοστιαία* αύξηση ή μείωση της τιμής  $S_{ih}/S_{(i-1)h}$  είναι ανεξάρτητη από την τιμή. Ιδιαίτερα είχαμε υποθέσει ότι

$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h}b, & \text{με πιθαν. } p \\ S_{(i-1)h}a, & \text{με πιθαν. } 1-p \end{cases}$$

όπου  $S_t$  τιμή μετοχής στο χρόνο  $t$ . Στο συνεχές μοντέλο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα μήκους  $h$ , η τιμή  $S_t$  μπορεί είτε να αυξηθεί είτε να μειωθεί με κάποια πιθανότητα και ανεξάρτητα από το παρελθόν ως εξής:

$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h}e^{\sigma\sqrt{h}}, & \text{με πιθαν. } p \\ S_{(i-1)h}e^{-\sigma\sqrt{h}}, & \text{με πιθαν. } 1-p \end{cases} \quad \text{όπου} \quad p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\Delta} \right).$$

Δηλαδή, η *ποσοστιαία* μείωση ή αύξηση της τιμής  $S_{ih}/S_{(i-1)h}$  σε κάθε *απειροστό* διάστημα χρόνου είναι *σταθερή* και *ανεξάρτητη* από το παρελθόν, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα αύξησης ή μείωσης είναι «κοντά» στο 0.5.

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε  $X_t = \ln S_t$ , τότε η  $X_{ih} = X_{(i-1)h} \pm \sigma h^{1/2}$  (με πιθαν.  $p$  το  $+$  και  $1-p$  το  $-$ ), και επομένως η ανέλιξη  $X_t = \ln S_t$ ,  $t \geq 0$  είναι μια κίνηση Brown. Δηλαδή, η τ.μ.  $X_{t+y} - X_t = \ln S_{t+y} - \ln S_t = \ln(S_{t+y}/S_t)$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(t\mu, t\sigma^2)$  και είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν  $S_u$ ,  $0 \leq u < y$ .

Μια στοχαστική ανέλιξη με τις παραπάνω ιδιότητες καλείται *γεωμετρική κίνηση Brown*. Ιδιαίτερα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 5.2.1.** Μία στοχαστική ανέλιξη  $S_t$ ,  $t \geq 0$  καλείται *γεωμετρική κίνηση Brown* με παραμέτρους  $\mu \in \mathbb{R}$  (τάση - drift) και  $\sigma > 0$  (μεταβλητότητα - volatility) (συμβ.  $GBM(\mu, \sigma^2)$ ) αν ισχύει ότι, για κάθε  $y \geq 0$ ,  $t > 0$ ,

1) Η τυχαία μεταβλητή

$$\ln \frac{S_{t+y}}{S_t} \sim N(t\mu, t\sigma^2), \quad (S_0 = 1)$$

2) Η τ.μ.  $S_{t+y}/S_t$  είναι ανεξάρτητη από τις  $S_u$ ,  $0 \leq u \leq y$ .

Όπως και η κίνηση Brown, η γεωμετρική κίνηση Brown αλλάζει *απειροστά* τιμή κάθε *απειροστό* χρονικό διάστημα και συνεπώς παρουσιάζει και αυτή «ιδιάζουσες διαδρομές». Μία πραγματοποίηση της στοχαστικής ανέλιξης  $S_t$ ,  $t \geq 0$  (δηλ. η  $\{S_t(\omega), t \geq 0\}$  για κάποιο  $\omega \in \Omega$ ) είναι και πάλι μία συνεχής συνάρτηση του  $t$  (δεν κάνει «άλματα») η οποία δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη (σχεδόν για κάθε  $\omega \in \Omega$ ).

Είναι προφανές ότι αν  $X_t$ ,  $t \geq 0 \sim BM(\mu, \sigma^2)$ , τότε η  $e^{X_t}$ ,  $t \geq 0 \sim GBM(\mu, \sigma^2)$ . Αν λοιπόν  $S_t$ ,  $t \geq 0 \sim GBM(\mu, \sigma^2)$  τότε η  $S_t$  ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή, δηλαδή ο λογάριθμός της ακολουθεί την κανονική κατανομή,

$$\ln S_t \sim N(t\mu, t\sigma^2),$$

και επομένως, αν  $Z \sim N(0,1)$ , οι ροπές  $k$  τάξης της τ.μ.  $S_t$  θα είναι

$$E(S_t^k) = E((e^{\ln S_t})^k) = E((e^{\sigma\sqrt{t}Z + t\mu})^k) = e^{kt\mu} E(e^{k\sigma\sqrt{t}Z})$$

Αλλά,

$$E(e^{uZ}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{uz} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-u)^2 + \frac{1}{2}u^2} dz = \frac{e^{\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = e^{\frac{1}{2}u^2},$$

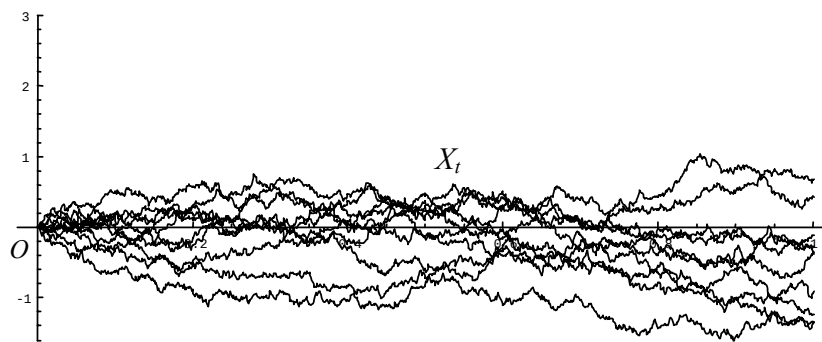
και συνεπώς,

$$E(S_t^k) = e^{kt\mu + \frac{1}{2}k^2t\sigma^2},$$

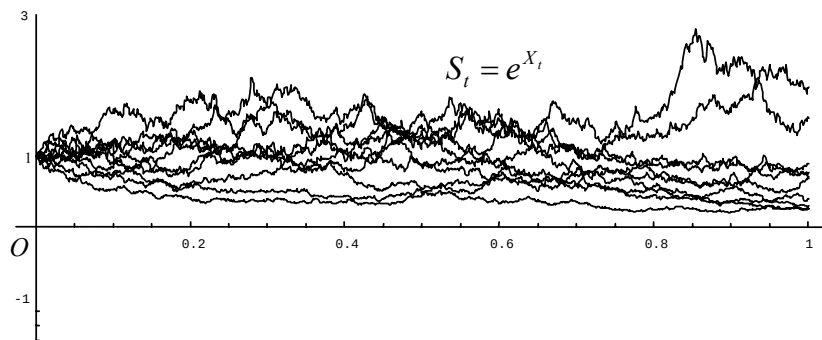
από όπου προκύπτει ότι

$$E(S_t) = e^{t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}, \quad V(S_t) = E(S_t^2) - E(S_t)^2 = e^{2t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}(e^{t\sigma^2} - 1).$$

Παρακάτω δίνονται τα γραφήματα 10 πραγματοποιήσεων μιας κίνησης Brown  $X_t$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\mu = -0.1$ ,  $\sigma = 0.8$ , και 10 πραγματοποιήσεων της αντίστοιχης γεωμετρικής κίνησης Brown  $S_t = e^{X_t}$ ,  $t \in [0, 1]$ . Παρατηρήστε τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ των δύο γραφημάτων. Και οι δύο ανεξίτητοι έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς την άνοδο και την κάθοδο των τιμών τους αλλά η γεωμετρική κίνηση Brown γίνεται πιο «βίαιη» όταν οι τιμές της απομακρύνονται από το 1 (προς τα πάνω), ενώ «ηρεμεί» όταν οι τιμές της «πλησιάζουν» το 0.



BM( $\mu = -0.1$ ,  $\sigma = 0.8$ )



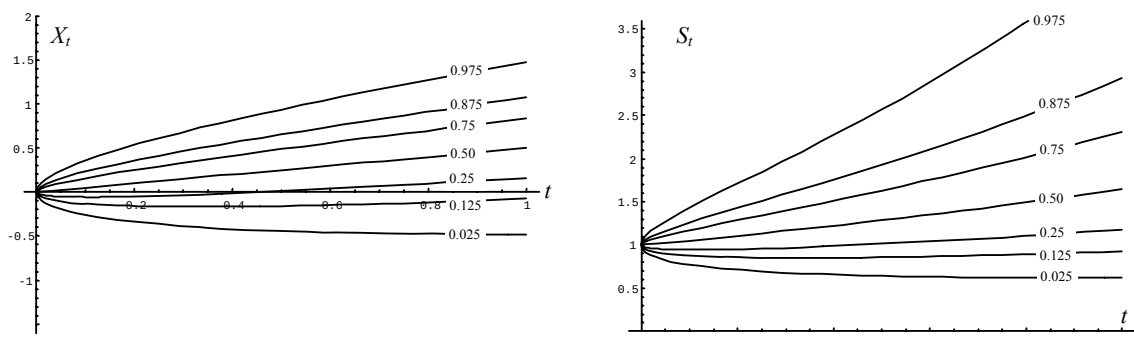
GBM( $\mu = -0.1$ ,  $\sigma = 0.8$ )

Στο χρόνο  $t = 1$ , η  $X_1$  θα ακολουθεί  $N(1\mu, 1\sigma^2) = N(-0.1, 0.64)$ , ενώ η  $S_1$  θα ακολουθεί λογαριθμικοκανονική κατανομή με

$$E(S_1) = e^{t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)} = e^{1 \cdot (-0.1 + \frac{1}{2} \cdot 0.8^2)} = e^{0.22} \approx 1.246, \quad V(S_1) = e^{2t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}(e^{t\sigma^2} - 1) = e^{0.44}(e^{0.64} - 1) \approx 1.083$$

Παρακάτω δίνονται τα συγκριτικά γραφήματα των περιοχών που βρίσκονται οι τιμές μιας  $X_t \sim \text{BM}(\mu = 0.5, \sigma = 1)$  (αριστερό σχήμα) και μιας  $S_t \sim \text{GBM}(\mu = 0.5, \sigma = 1)$  (δεξιό σχήμα). Συγκε-

κριμένα, για  $t \in [0, 1]$ , η  $X_t$  (αντίστοιχα η  $S_t$ ) βρίσκεται κάτω από τις καμπύλες στο αριστερό σχήμα (αντ. δεξιό) με πιθανότητες 0.025, 0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 0.875, 0.975 αντίστοιχα.



Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, ένα σχετικά απλό μοντέλο που μπορεί να περιγράψει την εξέλιξη τιμών χρηματοοικονομικών τίτλων στο χρόνο είναι η γεωμετρική κίνηση Brown. Στην πράξη, πρόκειται για ένα αρκετά αποδεκτό θεωρητικό μοντέλο το οποίο, λόγω της απλότητάς του, χρησιμοποιείται ως βάση για τη θεωρητική μελέτη πολλών προβλημάτων που σχετίζονται με την εξέλιξη τιμών στο χρόνο.

### 5.3. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση

Επεκτείνουμε τις έννοιες της μελλοντικής ιστορίας (φιλτραρίσματος) και του martingale σε συνεχή χρόνο με τον προφανή τρόπο:

**Ορισμός 5.3.1.** (i) Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ένας χώρος πιθανότητας. Μια οικογένεια σ-αλγεβρών  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$  (που περιέχονται στην  $\mathcal{F}$ ) με την ιδιότητα  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  για κάθε  $s, t$  με  $s \leq t$  καλείται *φιλτράρισμα* (filtration) ή *μελλοντική ιστορία*. Μία στοχαστική ανέλιξη  $X_t, t \geq 0$  θα καλείται *προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$*  αν η  $X_t$  είναι  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη (δηλαδή  $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$ ).

(ii) Μία στοχαστική ανέλιξη  $X_t, t \geq 0$  θα καλείται *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$  ( $\mathcal{F}_t$ -martingale) αν είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα αυτό,  $E(|X_t|) < \infty$ , και

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s, \quad s \leq t$$

με  $\text{πιθ. } 1$  (αν είναι  $\geq$  καλείται *submartingale* ενώ αν είναι  $\leq$  τότε καλείται *supermartingale*).

Στη συνέχεια θα λέμε ότι μία ανέλιξη  $X_t, t \geq 0$  είναι  $\mathcal{F}_t$ -BM( $\mu, \sigma^2$ ) αν η ανέλιξη αυτή είναι BM( $\mu, \sigma^2$ ), είναι προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$  και κάθε τ.μ.  $X_{t+s} - X_s$  είναι ανεξάρτητη της  $\mathcal{F}_s$  με  $y \leq s$ . Προφανώς μία BM( $\mu, \sigma^2$ ) είναι και  $\mathcal{F}_t$ -BM( $\mu, \sigma^2$ ) με  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ , το φυσικό της φιλτράρισμα. Στο εξής θα συμβολίζουμε με  $W_t, t \geq 0$ , μία στοχαστική ανέλιξη που είναι τυπική κίνηση Brown, BM(0,1).

**Πρόταση 5.3.1.** Αν η  $W_t, t \geq 0$  είναι  $\mathcal{F}_t$ -BM(0,1) τότε κάθε μία από τις ανελιξεις

$$(i) W_t, t \geq 0, \quad (ii) W_t^2 - t, t \geq 0, \quad (iii) e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}, t \geq 0.$$

είναι  $\mathcal{F}_t$ -martingale.

**Απόδειξη.** Από υπόθεση, η  $W_t$  είναι  $\mathcal{F}_t$  μετρήσιμη και  $W_t \sim N(0, t)$ . Επομένως  $E(|W_t|) \leq \sqrt{E(W_t^2)} = \sqrt{t} < \infty$  (για μια τ.μ.  $X$  ισχύει γενικά ότι  $E(X)^2 \leq E(X^2)$ ). Επίσης, για κάθε  $s \leq t$ ,

$$E(W_t | \mathfrak{F}_s) = E((W_t - W_s) + W_s | \mathfrak{F}_s) = E(W_t - W_s | \mathfrak{F}_s) + E(W_s | \mathfrak{F}_s) = E(W_t - W_s) + W_s = 0 + W_s$$

(ii) Άσκηση

(iii) Άσκηση

Ας επανέλθουμε πάλι προσωρινά στο μοντέλο διακριτού χρόνου. Στο μοντέλο εκείνο αποδείξαμε ότι ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν μπορεί να αποτιμηθεί, αρκεί να υπάρξει ένα μέτρο  $Q$  που κάνει martingale την (προεξοφλημένη) ανέλιξη των τιμών της μετοχής και επίσης μπορεί να κατασκευαστεί ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης (hedging portfolio), δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο που θα έχει τελική αξία (στο χρόνο  $T$ ) ίση με την αξία του παραγώγου. Τα ίδια βήματα θα προσπαθήσουμε να ακολουθήσουμε και στη συνεχή περίπτωση για αυτό και θα πρέπει να μεταφράσουμε όλες τις έννοιες που είδαμε στο διακριτό χρόνο σε συνεχή χρόνο. Ήδη κάναμε κάτι τέτοιο για την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Ας δούμε πως μπορούμε να ορίσουμε αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια σε συνεχή χρόνο.

**Παράδειγμα 5.3.1.** (αναπαράσταση αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου σε συνεχή χρόνο). Στο διακριτό χρόνο, αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο καλούμε ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο που στο χρόνο  $t_i$  έχει σύνθεση  $\mathbf{x}_i = (\psi_i, \Delta_i)$  ( $\psi_i$  ομόλογα και  $\Delta_i$  μετοχές) με αντίστοιχη αξία τίτλων  $\mathbf{S}_i = (e^{rt_i}, S_i)$  και ικανοποιεί την

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{S}'_i = \mathbf{x}_{i-1} \cdot \mathbf{S}'_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n.$$

ή ισοδύναμα την

$$V_i - V_{i-1} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{S}'_i - \mathbf{x}_{i-1} \cdot \mathbf{S}'_{i-1} = \mathbf{x}_{i-1} \cdot (\mathbf{S}'_i - \mathbf{S}'_{i-1}),$$

όπου με  $V_i$  συμβολίζουμε την αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο  $t_i$ . Κάνοντας ακόμη ένα βήμα, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα και με την μορφή (προσθέτουμε την παραπάνω κατά μέλη για  $i = 1, 2, \dots, k \leq n$ ),

$$V_k - V_0 = \sum_{i=1}^k (V_i - V_{i-1}) = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_{i-1} \cdot (\mathbf{S}'_i - \mathbf{S}'_{i-1}), k = 1, 2, \dots, n.$$

Είναι σημαντική η παρατήρηση ότι για να είναι εφικτή η κατασκευή ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου θα πρέπει οι  $\mathbf{x}_i, \mathbf{S}_i$  να είναι  $\mathfrak{F}_{t_i}$ -μετρήσιμες. Δηλαδή στο χρόνο  $t_i$  θα πρέπει η τιμή των διανυσμάτων αυτών να είναι γνωστή και όχι τυχαία μεταβλητή.

Αν σε συνεχή χρόνο θεωρήσουμε ότι ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο θα έχει σύνθεση  $\mathbf{x}_t = (\psi_t, \Delta_t)$  στο χρόνο  $t$ , με αντίστοιχη αξία τίτλων  $\mathbf{S}_t = (e^{rt}, S_t)$  τότε η παραπάνω τελευταία σχέση θα γράφεται,

$$V_{kh} - V_0 = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_{(i-1)h} \cdot (\mathbf{S}'_{ih} - \mathbf{S}'_{(i-1)h}) = \sum_{i=1}^k \psi_{(i-1)h} (e^{r_{ih}} - e^{r_{(i-1)h}}) + \sum_{i=1}^k \Delta_{(i-1)h} (S_{ih} - S_{(i-1)h}), k = 1, 2, \dots, n$$

και αν πάρουμε  $t = kh, h \rightarrow 0$ , θα μπορούσε να γραφεί στη συμβολική μορφή

$$V_t - V_0 = \int_0^t \psi_x de^{rx} + \int_0^t \Delta_x dS_x, t \in [0, T],$$

αρκεί τα παραπάνω ολοκληρώματα να είναι καλά ορισμένα και να αποτελούν όρια των αντίστοιχων ποσοτήτων του διακριτού μοντέλου. Το πρώτο (αριστερό) ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί απλούστερα ως εξής

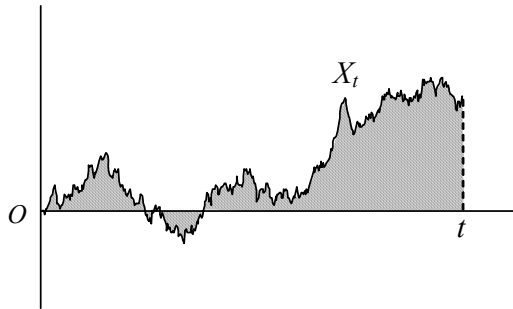
$$\int_0^t \psi_x de^{rx} = \int_0^t \psi_x \frac{de^{rx}}{dx} dx = r \int_0^t \psi_x e^{rx} dx$$

και επομένως πρόκειται για ένα σύννηθες ολοκλήρωμα Riemann επί της στοχαστικής ανέλιξης  $\psi_x$  (ή γενικότερα για ένα ολοκλήρωμα Lebesgue ως προς το μέτρο Lebesgue,  $\lambda$ ).

**Παράδειγμα 5.3.2.** (ολοκλήρωμα Riemann επί μιας στοχαστικής ανέλιξης) Είναι ενδιαφέρον σε αυτό το σημείο να εξετάσουμε ως παράδειγμα ένα ολοκλήρωμα όπως αυτό που περιγράφεται παραπάνω. Με αυτό το παράδειγμα θα πάρουμε μια εικόνα για τη φύση ενός ολοκληρώματος Riemann επί μιας στοχαστικής ανέλιξης. Ένα απλό και ενδιαφέρον ολοκλήρωμα παρόμοιας μορφής που αξίζει να εξετάσουμε είναι το

$$Y = \int_0^t W_x dx$$

όπου  $W_x, x \geq 0$  είναι μία τυπική κίνηση Brown. Πρόκειται για μία τυχαία μεταβλητή η οποία σε κάθε  $\omega \in \Omega$  αντιστοιχεί το  $Y(\omega) = \int_0^t W_x(\omega) dx \in \mathbb{R}$ , το οποίο είναι ένα σύννηθες ολοκλήρωμα (Riemann) επί μιας διαδρομής της ανέλιξης  $W_x, x \in [0, t]$ . Πολύ απλά εδώ πρόκειται για το εμβαδόν κάτω από μια τυχαία διαδρομή της τυπικής κίνησης Brown όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα (το ολοκλήρωμα ισούται με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν).



Αξίζει να δούμε ποια κατανομή ακολουθεί αυτή η τυχαία μεταβλητή. Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι ένα ολοκλήρωμα Riemann επί μιας συνάρτησης  $f(x)$  μπορεί να γραφεί (όταν υπάρχει) ως

$$\int_0^t f(x) dx = \sup \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1}),$$

όπου το supremum λαμβάνεται ως προς όλες τις διαμερίσεις  $\{t_0 < \dots < t_n\}$  του  $[0, t]$ . Πιο απλά, αν θεωρήσουμε τη διαμέριση  $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = nh, h = t/n$ , θα είναι

$$\int_0^t f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f((i-1)h) \cdot (ih - (i-1)h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{t/h} f(ih) \cdot h.$$

Επομένως το ολοκλήρωμα Riemann επί της  $W_x, x \in [0, t]$ , θα είναι

$$\int_0^t W_x dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{t/h} W_{ih} h.$$

Θεωρούμε τις τ.μ.  $Z_i = W_{ih} - W_{(i-1)h}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , οι οποίες είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν την  $N(0, h)$  (αφού η  $W_t$  είναι κίνηση Brown). Θα ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^n h W_{ih} = h \sum_{i=1}^n (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_i) = h(nZ_1 + (n-1)Z_2 + \dots + 1 \cdot Z_n),$$

( $n = t/h$ ) και επομένως η παραπάνω τ.μ. θα ακολουθεί κανονική κατανομή (ως γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών) με μέση τιμή 0 και διασπορά,

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^n hW_{ih}\right) &= V(h(nZ_1 + (n-1)Z_2 + \dots + 1 \cdot Z_n)) = h^2(n^2V(Z_1) + (n-1)^2V(Z_2) + \dots + 1 \cdot V(Z_n)) \\ &= h^3(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1) = h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{t(t+h)(2t+h)}{6}. \end{aligned}$$

Αρα, λαμβάνοντας  $h \rightarrow \infty$ , το ολοκλήρωμα Riemann επί της  $W_x, x \in [0, t]$ , θα είναι μια κανονική τ.μ. και συγκεκριμένα

$$\int_0^t W_x dx \sim N(0, \frac{t^3}{3}).$$

Αν τώρα επιχειρήσουμε κάτι παρόμοιο και για το δεύτερο ολοκλήρωμα, ώστε να καταλήξουμε σε ένα ολοκλήρωμα Riemann, δηλαδή,

$$\int_0^t \Delta_x dS_x = \int_0^t \Delta_x \frac{dS_x}{dx} dx$$

παρατηρούμε ότι παρουσιάζεται σοβαρό πρόβλημα αφού οι διαδρομές της στοχαστικής ανέλιξης  $S_x(\omega)$  δεν παραγωγίζονται (σχεδόν πάντοτε). Επομένως πριν προχωρήσουμε θα πρέπει να ορίσουμε εξ αρχής και να μελετήσουμε ολοκληρώματα της μορφής αυτής.

#### 5.4. Το ολοκλήρωμα Itô

Όπως είδαμε παραπάνω, παρουσιάζεται η ανάγκη ορισμού ενός ολοκληρώματος το οποίο θα εκφράζει αθροίσματα της μορφής

$$\int_0^t \Delta_x dS_x \approx \sum_{i=1}^{\lfloor t/h \rfloor} \Delta_{(i-1)h} (S_{ih} - S_{(i-1)h}) \quad \text{για } h \text{ «μικρό»}.$$

Θα ξεκινήσουμε την μελέτη τέτοιων ολοκληρωμάτων βασιζόμενοι στην κίνηση Brown. Ως συνήθως, θεωρούμε ότι εργαζόμαστε σε έναν χώρο  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  εφοδιασμένο με ένα φίλτράρισμα (μελλοντική ιστορία)  $\mathfrak{F}_t, t \geq 0$ .

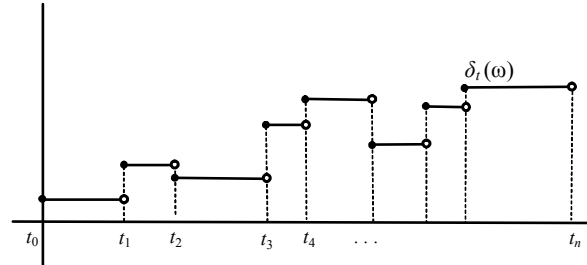
Έστω  $W_t, t \geq 0$ , μία  $\mathfrak{F}_t$ -BM(0,1). Η  $W_t, t \geq 0$ , είναι μία τυπική κίνηση Brown, προσαρμοσμένη στην  $\mathfrak{F}_t, t \geq 0$ , ενώ κάθε τ.μ. κάθε τ.μ.  $X_{t+s} - X_s$  είναι ανεξάρτητη της  $\mathfrak{F}_s$  με  $y \leq s$ . Έστω επίσης μία στοχαστική ανέλιξη  $\delta_t, t \in [0, T]$  για κάποιο  $T > 0$  η οποία είναι επίσης προσαρμοσμένη στην  $\mathfrak{F}_t, t \geq 0$  και είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, δηλαδή,

$$E\left(\int_0^t \delta_x^2 dx\right) < \infty \text{ για κάθε } t \in [0, T].$$

Για να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα της  $\delta_t$  ως προς την  $W_t$  θα ακολουθήσουμε ένα μηχανισμό που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στη θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης. Θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό αρχικά για  $\delta_t$  «απλή» συνάρτηση, και στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος για κάθε  $\delta_t$  λαμβάνοντας το όριο ολοκληρωμάτων «απλών» συναρτήσεων.

**Ορισμός 5.4.1.** Έστω μία διαμέριση  $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  του  $[0, T]$  (δηλ.  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ). Μία στοχαστική ανέλιξη  $\delta_t \in [0, T]$ , θα καλείται απλή (ως προς την διαμέριση  $\Pi$ ) αν είναι  $\mathfrak{F}_t$ -προσαρμοσμένη, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, και είναι σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα  $[t_{i-1}, t_i]$ .

Μία τυχαία διαδρομή μιας απλής στοχαστικής ανέλιξης  $\delta_t$  θα έχει την παρακάτω μορφή.



**Ορισμός 5.4.2.** Ορίζουμε ως στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô μιας απλής  $\delta_t$ ,  $t \geq 0$  ως προς την  $W_t$ ,  $t \geq 0$ , στο διάστημα  $[0, t]$ , την τυχαία μεταβλητή

$$I_t = \int_0^t \delta_x dW_x = \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \delta_{t_k} (W_t - W_{t_k}).$$

όπου  $k$  τέτοιο ώστε  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ .

Η οικογένεια των τ.μ.  $I_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι μία στοχαστική ανέλιξη η οποία παρουσιάζει συνεχείς διαδρομές (δηλ. η συνάρτηση  $g_\omega(t) = I_t(\omega)$  είναι συνεχής). Το γεγονός αυτό προκύπτει από το ότι η κίνηση Brown παρουσιάζει συνεχείς διαδρομές.

Ουσιαστικά, το ολοκλήρωμα Itô  $I_t$  εκφράζει το εμβαδόν «κάτω» από την στοχαστική ανέλιξη  $\delta_x$ ,  $x \in [0, t]$ . Μόνο που το εμβαδόν π.χ. ενός ορθογωνίου  $(\alpha, \beta) \times (0, x)$  τώρα δεν υπολογίζεται με βάση τον κανόνα: μήκος βάσης  $(\beta - \alpha)$  επί ύψος  $x$ , αλλά ως: προσαύξηση  $W_\beta - W_\alpha$  στο  $(\alpha, \beta)$  της  $W_t$ , επί ύψος  $x$ .

## 5.5. Βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô.

Το ολοκλήρωμα Itô (επί μιας απλής ανέλιξης  $\delta_t$ ,  $t \geq 0$ ) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες (οι οποίες όπως θα δούμε ισχύουν και στη γενική περίπτωση που η  $\delta_t$ ,  $t \geq 0$  δεν είναι απαραίτητα απλή).

**Πρόταση 5.5.1.** (i) Η τυχαία μεταβλητή  $I_t$  είναι  $\mathfrak{F}_t$ -μετρήσιμη.

(ii) Ισχύει ότι

$$\int_0^t (\delta_x + \gamma_x) dW_x = \int_0^t \delta_x dW_x + \int_0^t \gamma_x dW_x, \quad \text{και} \quad \int_0^t c \delta_x dW_x = c \int_0^t \delta_x dW_x,$$

όπου  $c$  είναι σταθερά ( $\gamma_t$ ,  $t \geq 0$ , είναι επίσης απλή ανέλιξη)

(iii) (Ισομετρία Itô) Ισχύει ότι

$$E(I_t^2) = E\left(\left(\int_0^t \delta_x dW_x\right)^2\right) = E\left(\int_0^t \delta_x^2 dx\right), \quad t \in [0, T].$$

(iv) Η στοχαστική ανέλιξη

$$I_t = \int_0^t \delta_x dW_x, \quad t \in [0, T],$$

είναι *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Απόδειξη.** Τα (i), (ii) είναι άμεσα από τον ορισμό του ολοκληρώματος.

(iii) Για απλότητα ας υποθέσουμε ότι  $t = t_k$  και ας συμβολίσουμε με  $D_i$  την διαφορά  $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ . Θα είναι

$$E\left(\left(\int_0^t \delta_x dW_x\right)^2\right) = E\left(\left(\sum_{i=0}^{k-1} \delta_{t_i} D_i\right)^2\right) = E\left(\sum_{i=0}^{k-1} \delta_{t_i}^2 D_i^2 + 2 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{t_i} \delta_{t_j} D_i D_j\right)$$

Η τ.μ.  $D_i$  είναι ανεξάρτητη από τις  $\delta_{t_i}, \delta_{t_j}, D_j$  (είναι ανεξάρτητη από όλες τις  $\delta_s$ ,  $s \leq t_i$ , διότι η  $W_t$  είναι  $\mathfrak{F}_t$  - BM(0,1) και επομένως η  $D_i$  είναι ανεξάρτητη της  $\mathfrak{F}_{t_i}$ , ενώ  $\sigma(\delta_s) \subseteq \mathfrak{F}_{t_i}$ ,  $s \leq t_i$ , ενώ επίσης είναι ανεξάρτητη και από τις  $D_j, j < i$  διότι η  $W_t$  έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις) και επομένως

$$E\left(\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{t_i} \delta_{t_j} D_i D_j\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i-1} E(\delta_{t_i} \delta_{t_j} D_j) E(D_i) = 0$$

διότι  $E(D_i) = 0$ . Άρα,

$$\begin{aligned} E\left(\left(\int_0^t \delta_x dW_x\right)^2\right) &= \sum_{i=0}^{k-1} E(\delta_{t_i}^2 D_i^2) = \sum_{i=0}^{k-1} E(\delta_{t_i}^2) E(D_i^2) = \sum_{i=0}^{k-1} E(\delta_{t_i}^2) (t_{i+1} - t_i) \\ &= E\left(\sum_{i=0}^{k-1} \delta_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i)\right) = E\left(\int_0^t \delta_x^2 dx\right). \end{aligned}$$

Για  $t_k < t < t_{k+1}$  η απόδειξη είναι ανάλογη (εμφανίζονται κάποιοι επιπλέον όροι στα αθροίσματα αλλά προκύπτει ο ίδιος τελικός τύπος).

(iv) Η ανέλιξη  $I_t$ ,  $t \in [0, T]$  είναι, από το (i), προσαρμοσμένη στην  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Επίσης, από την ανισότητα  $E(X^2) = E(|X|^2) \geq (E|X|)^2$  που ισχύει για κάθε τ.μ., προκύπτει ότι

$$E | I_t | \leq \sqrt{E(I_t^2)} = \sqrt{E\left(\int_0^t \delta_x^2 dx\right)} < \infty.$$

Η μέση τιμή μέσα στην ρίζα είναι πεπερασμένη για κάθε  $t$ , γιατί έχουμε υποθέσει ότι η  $\delta_t$  είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Επίσης, έστω  $s < t$ . Για ευκολία ας υποθέσουμε ότι  $s = t_m$ ,  $t = t_k$ ,  $m < k$ . Θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} E(I_t | \mathfrak{F}_s) &= E\left(\sum_{i=0}^{k-1} \delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathfrak{F}_{t_m}\right) = E\left(\sum_{i=0}^{m-1} \delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sum_{i=m}^{k-1} \delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathfrak{F}_{t_m}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sum_{i=m}^{k-1} E(\delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathfrak{F}_{t_m}) = I_s + \sum_{i=m}^{k-1} E(\delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathfrak{F}_{t_m}) \end{aligned}$$

Αλλά

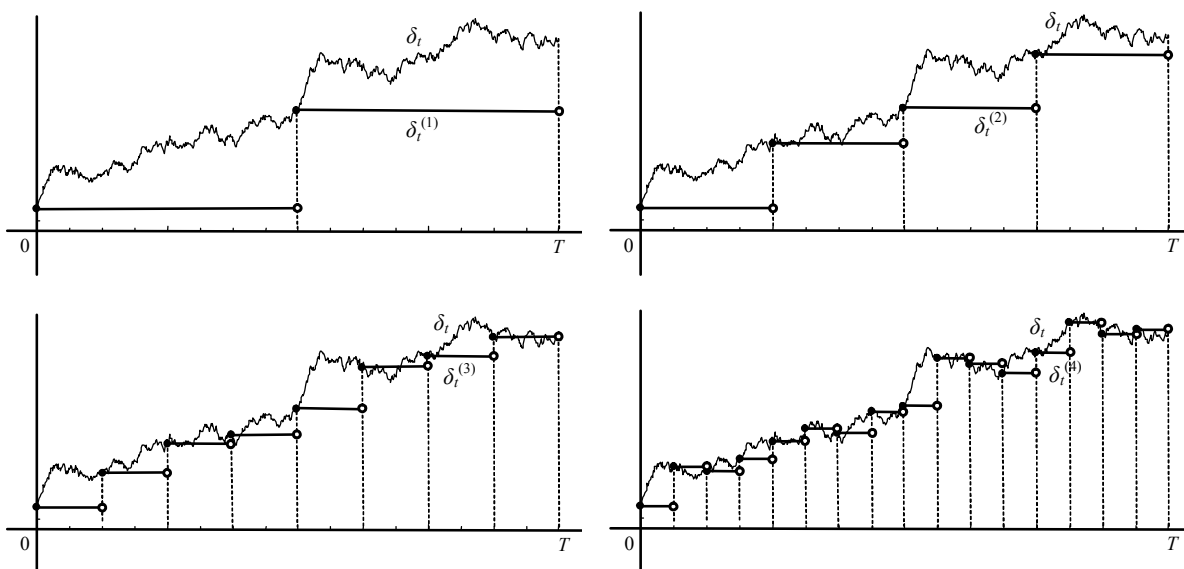
$$\sum_{i=m}^{k-1} E(\delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathfrak{F}_{t_m}) = \sum_{i=m}^{k-1} E(\delta_{t_i} E(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}) | \mathfrak{F}_{t_m}) = \sum_{i=m}^{k-1} E(\delta_{t_i} \cdot 0 | \mathfrak{F}_{t_m}) = 0$$

αφού  $E(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}) = E(W_{t_{i+1}} | \mathfrak{F}_{t_i}) - W_{t_i} = 0$  επειδή, όπως έχουμε δείξει παραπάνω, η τυπική κίνηση Brown είναι martingale. Άρα τελικά  $E(I_t | \mathfrak{F}_s) = I_s$ . Η απόδειξη για  $t_m < s < t_{m+1}$ ,  $t_k < t < t_{k+1}$  ή ακόμη για  $t_k < s < t < t_{k+1}$  είναι παρόμοια (και εδώ εμφανίζονται κάποιοι επιπλέον όροι στα αθροίσματα αλλά προκύπτει ο ίδιος τελικός τύπος).  $\square$

Ας επεκτείνουμε τώρα τα παραπάνω και για μη απλές ανελιζεις  $\delta_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Εξακολουθούμε να θεωρούμε στοχαστικές ανελιζεις  $\delta_t$ ,  $t \in [0, T]$  προσαρμοσμένες στην  $\mathfrak{F}_t$  οι οποίες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Αποδεικνύεται ότι για κάθε  $\delta_t$  (όχι απαραίτητα απλή) υπάρχει μία ακολουθία από απλές συναρτήσεις  $\delta_t^{(j)}$   $j = 1, 2, \dots$  οι οποίες συγκλίνουν στην  $\delta_t$  έτσι ώστε

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E\left(\int_0^T |\delta_t - \delta_t^{(j)}|^2 dt\right) = 0.$$

Η  $\delta_t^{(j)}$  μπορεί να ορισθεί ως εξής: Χωρίζουμε το  $[0, T]$  σε  $n = 2^j$  ίσα διαστήματα (δηλ. θεωρούμε τη διαμέριση  $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = nh = T$  όπου  $h = T / 2^j, n = 2^j$ ) και λαμβάνουμε τη  $\delta_t^{(j)}$ ,  $t \in [0, T]$  σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα  $[t_i, t_{i+1})$  και ίση με  $\delta_{t_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Για παράδειγμα οι 4 πρώτες  $\delta_t^{(j)}$  έχουν την ακόλουθη μορφή για μία δοθείσα  $\delta_t$ .



**Ορισμός 5.5.1.** Ορίζουμε ως στοχαστικό ολοκλήρωμα Ιτô της  $\delta_t$ ,  $t \geq 0$  ως προς την  $W_t$ ,  $t \geq 0$  στο διάστημα  $[0, t]$ ,  $t \leq T$ , την τυχαία μεταβλητή

$$\int_0^t \delta_x dW_x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^t \delta_x^{(j)} dW_x.$$

όπου  $\delta_t^{(j)}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $j = 1, 2, \dots$  είναι μία ακολουθία απλών ανελιξεων που συγκλίνουν στην  $\delta_t$ ,  $t \in [0, T]$ .

Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω όριο υπάρχει και το ολοκλήρωμα της  $\delta_t$  είναι καλά ορισμένο (ανεξάρτητο της ακολουθίας των απλών ανελιξεων). Επίσης αποδεικνύεται ότι, *όλες οι ιδιότητες του ολοκληρώματος Ιτô για απλές ανελιζεις που αναφέρθηκαν παραπάνω ισχύουν και τώρα.*

**Παράδειγμα 5.5.1.** Έχει ίσως ξεχωριστό ενδιαφέρον να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Itô

$$\int_0^t W_x dW_x.$$

Αν ίσχυαν οι γνωστοί κανόνες της κλασικής ολοκλήρωσης, θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\int_0^t W_x dW_x = \int_0^{W_t} x dx = \frac{W_t^2}{2}.$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η παραπάνω σχέση **δεν ισχύει**. Αρχικά παρατηρούμε ότι  $W_t, t \in [0, T]$  είναι πράγματι προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t, t \in [0, T]$  και επίσης είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη:

$$E\left(\int_0^t W_x^2 dx\right) = \int_0^t E(W_x^2) dx = \int_0^t x dx = \frac{t^2}{2} < \infty.$$

Έστω κάποιος ακέραιος  $j$ . Θεωρούμε τη διαμέριση  $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = nh = T$  όπου  $h = T/2^j, n = 2^j$  και θεωρούμε την απλή ανέλιξη  $W_t^{(j)}, t \in [0, T]$  σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα  $[ih, (i+1)h)$  και ίση με  $W_{ih}, i = 0, 1, \dots, n-1$ . Θα χρειαστεί να υπολογίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα της απλής  $W_t^{(j)}$ ,

$$I_T^{(j)} = \int_0^T W_x^{(j)} dW_x = \sum_{i=0}^{n-1} W_{ih} (W_{(i+1)h} - W_{ih}).$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ( $W_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{(i+1)h} - W_{ih})^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} W_{(i+1)h}^2 + \sum_{i=0}^{n-1} W_{ih}^2 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} W_{(i+1)h} W_{ih} = W_{nh}^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} W_{ih}^2 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} W_{(i+1)h} W_{ih} \\ &= W_{nh}^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} (W_{ih}^2 - W_{(i+1)h} W_{ih}) = W_T^2 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} W_{ih} (W_{(i+1)h} - W_{ih}), \end{aligned}$$

και επομένως

$$\int_0^T W_x^{(j)} dW_x = \sum_{i=0}^{n-1} W_{ih} (W_{(i+1)h} - W_{ih}) = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{(i+1)h} - W_{ih})^2.$$

Παρατηρούμε ότι οι τ.μ.  $Y_i = n(W_{(i+1)h} - W_{ih})^2, i = 1, 2, \dots, n$ , είναι ανεξάρτητες τ.μ. με μέση τιμή  $E(n(W_{(i+1)h} - W_{ih})^2) = nh = T$  και επομένως από τον νόμο των μεγάλων αριθμών,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (W_{(i+1)h} - W_{ih})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \rightarrow E(Y) = T.$$

Άρα τελικά προκύπτει ότι

$$\int_0^T W_x dW_x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T W_x^{(j)} dW_x = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{(i+1)h} - W_{ih})^2 = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T.$$

Η παραπάνω ισχύει για κάθε  $T$  και επομένως μπορούμε να γράψουμε γενικά ότι,

$$\int_0^t W_x dW_x = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t, \quad t \geq 0.$$

**Παρατήρηση 5.5.1.** Η επιλογή της μορφής των όρων του αθροίσματος

$$\sum_{i=0}^{k-1} \delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

στον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô είναι θεμελιώδους σημασίας. Πιο συγκεκριμένα, αν το στοχαστικό ολοκλήρωμα είχε οριστεί με βάση π.χ. όρους της μορφής

$$\sum_{i=0}^{k-1} \delta_{t_{i+1}} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

δηλαδή χρησιμοποιούσαμε την τιμή της ανέλιξης  $\delta_t$  στο δεξί άκρο διαστήματος  $[t_i, t_{i+1}]$  (κάτι που δεν φαίνεται να παρουσιάζει τεχνικό πρόβλημα), τότε η τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος θα ήταν διαφορετική (π.χ. το  $\int W_t dW_t$  θα είχε διαφορετική λύση – αφήνεται ως άσκηση). Επομένως μία εύλογη απορία είναι γιατί ορίσαμε το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα με τον τρόπο που το ορίσαμε και όχι διαφορετικά, επιλέγοντας, όχι την τιμή του  $\delta_t$  στο αριστερό άκρο, αλλά μία άλλη τιμή του μέσα στο  $[t_i, t_{i+1}]$ ; (π.χ. το μέσο του διαστήματος)

Η απάντηση είναι ότι ο ορισμός του ολοκληρώματος Itô προέκυψε φυσιολογικά μέσα από την έκφραση της αξίας ενός αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου σε συνεχή χρόνο. Στα χρηματοοικονομικά μοντέλα που εξετάζουμε, η τιμή  $\delta_t$  συνήθως εκφράζει την ποσότητα ενός τίτλου επάνω στον οποίο πρέπει να επενδύσουμε στο χρονικό διάστημα  $[t_i, t_{i+1}]$  και επομένως θα πρέπει να είναι γνωστή στο χρόνο  $t_i$ . Η  $\delta_t, t \geq 0$  είναι προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$  και επομένως η τιμή της  $\delta_{t_i}$  είναι γνωστή στο χρόνο  $t_i$  (ενώ π.χ. η  $\delta_{t_{i+1}}$  είναι τυχαία μεταβλητή στο χρόνο  $t_i$ ).

**Παρατήρηση 5.5.2.** Έχουμε ήδη αποδείξει ότι γενικά, ανεξίτητες της μορφής  $I_t = \int_0^t \delta_x dW_x, t \in [0, T]$  είναι martingale και επομένως και η  $\int_0^t W_x dW_x, t \in [0, T]$  θα είναι martingale. Οπότε θα πρέπει

$$E\left(\int_0^t W_x dW_x\right) = E(I_0) = 0.$$

Το παραπάνω γεγονός αποτελεί έναν επιπλέον λόγο για το ότι δεν μπορεί να ισχύει ο τύπος  $\int_0^t W_x dW_x = W_t^2 / 2$  που είχαμε αρχικά προτείνει. Αντίθετα, ο τύπος που βρήκαμε παραπάνω δίνει

$$E\left(\int_0^t W_x dW_x\right) = \frac{1}{2} E(W_t^2) - \frac{t}{2} = \frac{t}{2} - \frac{t}{2} = 0.$$

όπως θα έπρεπε.

**Παρατήρηση 5.5.3.** Ο τύπος που αποδείξαμε παραπάνω, όπως και κάθε αντίστοιχος τύπος που αφορά στοχαστικά ολοκληρώματα, είναι μερικές φορές βολικότερο να γράφεται σε διαφορική μορφή. Για παράδειγμα η ολοκληρωτική μορφή

$$2 \int_0^t W_x dW_x = W_t^2 - t, \quad t \geq 0$$

μπορεί από σύμβαση να γράφεται και στην ακόλουθη διαφορική μορφή

$$2 W_x dW_x = dW_x^2 - dx, \quad x \geq 0.$$

η οποία όταν ολοκληρωθεί από 0 έως  $t$  μας δίνει την ολοκληρωτική μορφή. Η διαφορική μορφή αυτή από μόνη της δεν έχει κάποια αυστηρή μαθηματική ερμηνεία (ίσως σε ορισμένες περιπτώσεις

σεις να έχει διαισθητική ερμηνεία), απλώς χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει ότι ισχύει η αντίστοιχη ολοκληρωτική μορφή. Η παραπάνω διαφορική μορφή μπορεί να θεωρηθεί ως μια *στοχαστική διαφορική εξίσωση* που ικανοποιεί η ανέλιξη  $W_t$ .

**Παρατήρηση 5.5.4.** Στο παραπάνω παράδειγμα αποδείχθηκε ότι, για κάθε  $T$ , η λεγόμενη *τετραγωνική κύμανση* της ανέλιξης  $W_t$  στο  $[0, T]$  είναι ίση με

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{(i+1)h} - W_{ih})^2 = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i = E(Y) = T,$$

όπου  $Y_i = n(W_{(i+1)h} - W_{ih})^2$ , η οποία θα μπορούσε να γραφεί σε ολοκληρωτική μορφή (χρησιμ. το  $t$  στη θέση του  $T$ ),  $\int_0^t (dW_x)^2 = t$  ή από σύμβαση σε διαφορική μορφή  $(dW_t)^2 = dt$ . Όμοια, είναι εύκολο να δειχθεί ότι (από τον νόμο των μεγάλων αριθμών)

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{(i+1)h} - W_{ih})(t_{(i+1)h} - t_{ih}) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{T}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{(i+1)h} - W_{ih}) = T \cdot 0 = 0,$$

και

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{(i+1)h} - t_{ih})^2 = \lim_{n \rightarrow 0} n \frac{T^2}{n^2} = 0,$$

και επομένως μπορούμε συμβολικά να γράφουμε

$$(dW_t)^2 = dt, \quad dW_t \cdot dt = 0, \quad (dt)^2 = 0.$$

Οι «κανόνες» αυτοί των γινομένων διαφορικών θα αποδειχθούν αρκετά χρήσιμοι στη συνέχεια.

## 5.6. Ο τύπος του Itô

Είναι γνωστό ότι στην κλασική ανάλυση ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας (για δύο παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις  $f, g$ ),

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t))g'(t) \quad \text{ή} \quad df(g(t)) = f'(g(t))dg(t).$$

Η παραπάνω γράφεται σε ολοκληρωτική μορφή (χρησιμοποιούμε το ολοκλ. Riemann)

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(x))g'(x) dx$$

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν ο παραπάνω τύπος ισχύει και για τα ολοκληρώματα Itô. Εάν ίσχυε θα είχαμε ότι

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_x) dW_x \quad (df(W_t) = f'(W_t) dW_t).$$

Όπως θα δούμε στο αμέσως επόμενο θεώρημα, ο παραπάνω τύπος **δεν ισχύει**. Θα πρέπει στο δεξιό μέρος της ισότητας να προστεθεί και ένας επιπλέον παράγοντας ο οποίος όπως θα δούμε οφείλεται στη μη μηδενική τετραγωνική κύμανση της κίνησης Brown.

**Θεώρημα 5.6.1.** (τύπος του Itô για συναρτήσεις της μορφής  $f(W_t)$ ). Έστω  $f: R \rightarrow R$  μία συνάρτηση η οποία έχει συνεχή πρώτη  $f'$  και δεύτερη παράγωγο  $f''$  και  $W_t \sim \text{BM}(0,1)$ . Για κάθε  $t \geq 0$  ισχύει ότι

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_x) dW_x + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_x) dx.$$

**Σχέδιο απόδειξης.** Δεν θα προχωρήσουμε σε μία μαθηματικά αυστηρή απόδειξη η οποία, αν και δεν θα ήταν τόσο δύσκολη, θα ήταν κάπως μακροσκελής και θα βασιζόταν σε αρκετές τεχνικές λεπτομέρειες οι οποίες δεν κρίνεται σκόπιμο να αναπτυχθούν στα πλαίσια της εισαγωγής αυτής. Αντίθετα, το ακόλουθο σχέδιο απόδειξης δείχνει πολύ καθαρά γιατί ισχύει η παραπάνω σχέση αποφεύγοντας τις τεχνικές λεπτομέρειες.

Η γνωστή σχέση  $df(g(t)) = f'(g(t))dg(t)$  βασίζεται στο ανάπτυγμα Taylor της  $f$  (γύρω από το  $x_0$ ):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \varepsilon, \text{ για κάθε } x.$$

όπου  $\varepsilon$  είναι ένα υπόλοιπο τάξης  $(x - x_0)^3$ . Πράγματι, αν θέσουμε  $x = g(t + h)$ ,  $x_0 = g(t)$  η παραπάνω γίνεται

$$f(g(t + h)) - f(g(t)) = f'(g(t))(g(t + h) - g(t)) + \frac{f''(g(t))}{2}(g(t + h) - g(t))^2 + \varepsilon,$$

και θεωρώντας ότι  $h \rightarrow 0$  γράφεται

$$df(g(t)) = f'(g(t))dg(t) + \frac{f''(g(t))}{2}(dg(t))^2 = f'(g(t))dg(t),$$

διότι  $(dg(t))^2 = (g'(t))^2(dt)^2 = 0$  αφού, όπως έχουμε ήδη επισημάνει,  $(dt)^2 = 0$ . Αν τώρα στο αρχικό ανάπτυγμα θέσουμε  $x = W_{t+h}$ ,  $x_0 = W_t$  τότε προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$f(W_{t+h}) - f(W_t) = f'(W_t)(W_{t+h} - W_t) + \frac{f''(W_t)}{2}(W_{t+h} - W_t)^2 + \varepsilon$$

και θεωρώντας ότι  $h \rightarrow 0$  γράφεται

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{f''(W_t)}{2}(dW_t)^2 = f'(W_t)dW_t + \frac{f''(W_t)}{2}dt$$

διότι όπως έχουμε επισημάνει  $(dW_t)^2 = dt$ . Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη διαφορική μορφή της ολοκληρωτικής εξίσωσης που έπρεπε να αποδειχθεί.  $\square$

Από την παραπάνω δικαιολόγηση βλέπουμε ότι η διαφορά μεταξύ του τύπου της κλασικής ανάλυσης και της ανάλυσης Itô προέρχεται από το γεγονός ότι στην δεύτερη περίπτωση στη θέση του  $(dg(t))^2$  (που είναι 0 διότι η παραγωγίσιμη  $g$  έχει μηδενική τετραγωνική κύμανση) εμφανίζεται ο όρος  $(dW_t)^2$  (που είναι ίσος με  $dt$ ).

**Εφαρμογή 5.6.1.** Αν πάρουμε  $f(x) = x^2/2$  τότε ο τύπος του Itô δίνει:

$$\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}W_0^2 = \int_0^t W_x dW_x + \frac{1}{2} \int_0^t dx$$

και επομένως προκύπτει άμεσα ο τύπος  $\int_0^t W_x dW_x = W_t^2/2 - t/2$  που αποδείξαμε παραπάνω χωρίς τη χρήση του τύπου του Itô.

**Θεώρημα 5.6.2.** (τύπος του Itô για συναρτήσεις της μορφής  $f(t, W_t)$ ). Έστω  $f(t, x): R^2 \rightarrow R$  μία συνάρτηση η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x^j} f \equiv f^{(i,j)}, i, j = 0, 1, 2,$$

και  $W_t \sim \text{BM}(0,1)$ . Για κάθε  $t \geq 0$  ισχύει ότι

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^t f^{(0,1)}(x, W_x) dW_x + \int_0^t f^{(1,0)}(x, W_x) dx + \frac{1}{2} \int_0^t f^{(0,2)}(x, W_x) dx.$$

**Σχέδιο απόδειξης.** Και εδώ, δεν θα προχωρήσουμε σε μία μαθηματικά αυστηρή απόδειξη για τους ίδιους λόγους που αναφέραμε και στο προηγούμενο σχέδιο απόδειξης.

Από το ανάπτυγμα Taylor της  $f$  (γύρω από το  $(t_0, x_0)$ ), για κάθε  $(t, x)$ , ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f(t, x) &= f(t_0, x_0) + f^{(0,1)}(t_0, x_0)(x - x_0) + f^{(1,0)}(t_0, x_0)(t - t_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} f^{(0,2)}(t_0, x_0)(x - x_0)^2 + f^{(1,1)}(t_0, x_0)(x - x_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} f^{(2,0)}(t_0, x_0)(t - t_0)^2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε  $x = W_{t+h}$ ,  $x_0 = W_t$ , και στη θέση των  $t, t_0$  πάρουμε τα  $t+h, t$ , η παραπάνω γίνεται

$$\begin{aligned} f(t+h, W_{t+h}) &= f(t, W_t) + f^{(0,1)}(t, W_t)(W_{t+h} - W_t) + f^{(1,0)}(t, W_t)h \\ &\quad + \frac{1}{2} f^{(0,2)}(t, W_t)(W_{t+h} - W_t)^2 + f^{(1,1)}(t, W_t)(W_{t+h} - W_t)h + \frac{1}{2} f^{(2,0)}(t, W_t)h^2 + \varepsilon, \end{aligned}$$

και θεωρώντας ότι  $h \rightarrow 0$  γράφεται

$$\begin{aligned} df(t, W_t) &= f^{(0,1)}(t, W_t) dW_t + f^{(1,0)}(t, W_t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} f^{(0,2)}(t, W_t) (dW_t)^2 + f^{(1,1)}(t, W_t) dW_t dt + \frac{1}{2} f^{(2,0)}(t, W_t) (dt)^2, \end{aligned}$$

αλλά,  $(dW_t)^2 = dt$ ,  $dW_t dt = 0$ ,  $(dt)^2 = 0$  και τελικά,

$$df(t, W_t) = f^{(0,1)}(t, W_t) dW_t + f^{(1,0)}(t, W_t) dt + \frac{1}{2} f^{(0,2)}(t, W_t) dt.$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη διαφορική μορφή της ολοκληρωτικής εξίσωσης που έπρεπε να αποδειχθεί.  $\square$

**Εφαρμογή 5.6.2.** Αν πάρουμε  $f(t, x) = e^{\sigma x + \mu t}$  ( $\sigma, \mu$  σταθερές) τότε ο τύπος του Itô

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^t f^{(0,1)}(x, W_x) dW_x + \int_0^t f^{(1,0)}(x, W_x) dx + \frac{1}{2} \int_0^t f^{(0,2)}(x, W_x) dx$$

δίνει

$$\begin{aligned} e^{\sigma W_t + \mu t} - 1 &= \int_0^t \sigma e^{\sigma W_x + \mu x} dW_x + \int_0^t \mu e^{\sigma W_x + \mu x} dx + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 e^{\sigma W_x + \mu x} dx \\ &= \sigma \int_0^t e^{\sigma W_x + \mu x} dW_x + \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_0^t e^{\sigma W_x + \mu x} dx \end{aligned}$$

ή σε διαφορική μορφή  $de^{\sigma W_t + \mu t} = \sigma e^{\sigma W_t + \mu t} dW_t + (\mu + \sigma^2/2) e^{\sigma W_t + \mu t} dt$  και επομένως η γεωμετρική κίνηση Brown  $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}$ ,  $t \geq 0$  (GBM( $\mu, \sigma^2$ )) με αρχική τιμή  $S_0$ ) ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$S_t - S_0 = \sigma \int_0^t S_x dW_x + \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_0^t S_x dx$$

ή ισοδύναμα τη στοχαστική διαφορική εξίσωση  $dS_t = \sigma S_t dW_t + (\mu + \frac{1}{2} \sigma^2) S_t dt$ .

## 5.7. Στοχαστικές Ανελίξεις Itô

Στις προηγούμενες παραγράφους ορίσαμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô

$$\int_0^t \delta_x dW_x,$$

μιας στοχαστικής ανέλιξης  $\delta_t$ ,  $t \in [0, T]$  ως προς την τυπική κίνηση Brown  $W_t$ ,  $t \geq 0$ . Υπενθυμίζεται ότι η ανάγκη ορισμού ενός τέτοιου ολοκληρώματος γεννήθηκε κατά την προσπάθεια αναπαράστασης της αξίας  $V_t$  ενός αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου σε ένα μοντέλο συνεχούς χρόνου. Όμως, σε εκείνη την αναπαράσταση θα έπρεπε να εμφανίζεται ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_0^t \delta_x dS_x,$$

όπου η στοχαστική ανέλιξη  $S_t$ ,  $t \geq 0$  (η τ.μ.  $S_t$  εκφράζει την αξία ενός τίτλου στο χρόνο  $t$ ), δεν είναι κατ'ανάγκη μια τυπική κίνηση Brown. Μάλιστα δικαιολογήσαμε ότι η κίνηση Brown δεν έχει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά για το σκοπό αυτό και ότι είναι καλύτερο να θεωρήσουμε ότι η  $S_t$ ,  $t \geq 0$ , ακολουθεί μία γεωμετρική κίνηση Brown. Επομένως, θα πρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος ώστε να λαμβάνεται και ως προς άλλες στοχαστικές ανελίξεις, εκτός της τυπικής κίνησης Brown. Στη συνέχεια θα ορίσουμε στοχαστικά ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^t \delta_x dY_x,$$

όπου  $Y_t$ ,  $t \geq 0$  είναι μία στοχαστική ανέλιξη με κάποια επιθυμητά χαρακτηριστικά που θα περιγράψουμε παρακάτω. Οι ανελίξεις  $Y_t$ ,  $t \geq 0$  που έχουν αυτά τα χαρακτηριστικά αυτά θα καλούνται ανελίξεις Itô και ο ακριβής ορισμός τους είναι ο ακόλουθος.

**Ορισμός 5.7.1.** (*Itô processes – Ανελιζεις Itô*). Μία στοχαστική ανέλιξη  $Y_t$ ,  $t \geq 0$  θα καλείται ανέλιξη Itô αν μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t H_x dW_x + \int_0^t G_x dx,$$

όπου  $W_t \sim \mathfrak{F}_t - \text{BM}(0,1)$ , και  $H_t, G_t$ ,  $t \geq 0$ , είναι κάποιες στοχαστικές ανελίξεις προσαρμοσμένες στην  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \geq 0$

( $H, Y_0$  θεωρείται  $\mathfrak{F}_0$  – μετρήσιμη, δηλαδή δεν είναι τ.μ., επίσης θεωρούμε ότι τα παραπάνω ολοκλήρωματα ορίζονται, δηλαδή  $E(\int_0^t H_x^2 dx) < \infty$ ,  $\int_0^t |G_x| dx < \infty$  για κάθε  $t > 0$ )

Η στοχαστική ανέλιξη  $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}$  είναι μια ανέλιξη Itô διότι, όπως είδαμε στην Εφαρμογή 5.6.2 μπορεί να παρασταθεί με την παραπάνω μορφή με  $H_t = \sigma S_t$ ,  $G_t = (\mu + \sigma^2/2)S_t$ . Οι συγκεκριμένες  $H_t, G_t$  είναι πράγματι προσαρμοσμένες στην  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \geq 0$ , διότι στο χρόνο  $t$  είναι γνωστή η τιμή της  $W_t$  και άρα και της  $S_t$ .

Μπορούμε τώρα πολύ απλά να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα  $\int_0^t \delta_x dY_x$  αντικαθιστώντας το  $dY_x$  με αυτό που προκύπτει από τη διαφορική μορφή της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης,

$$dY_x = H_x dW_x + G_x dx.$$

Συγκεκριμένα προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

**Ορισμός 5.7.2.** (*Στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô ως προς μία ανέλιξη Itô*). Έστω  $Y_t$ ,  $t \geq 0$  μία ανέλιξη Itô με  $dY_t = H_t dW_t + G_t dt$  και  $\delta_t$ ,  $t \geq 0$  μία στοχαστική ανέλιξη προσαρμοσμένη στην  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \geq 0$ . Ως ολοκλήρωμα Itô της  $\delta_t$  ως προς την  $Y_t$  ορίζεται η ποσότητα

$$\int_0^t \delta_x dY_x = \int_0^t \delta_x H_x dW_x + \int_0^t \delta_x G_x dx.$$

Επομένως π.χ. για την ανέλιξη Itô,  $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}$ , θα έχουμε ότι

$$\int_0^t \delta_x dS_x = \int_0^t \delta_x (\sigma S_t dW_t + (\mu + \frac{1}{2} \sigma^2) S_t dt) = \sigma \int_0^t \delta_x S_t dW_x + (\mu + \frac{1}{2} \sigma^2) \int_0^t \delta_x S_t dx.$$

Ο τύπος του Itô μπορεί τώρα να αποδειχθεί και για στοχαστικά ολοκληρώματα ως προς μία ανέλιξη Itô.

**Θεώρημα 5.7.1.** (*τύπος του Itô για συναρτήσεις της μορφής  $f(t, Y_t)$ , όπου  $Y_t$  είναι μια ανέλιξη Itô*). Έστω  $f(t, x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x^j} f \equiv f^{(i,j)}, \quad i, j = 0, 1, 2,$$

και  $Y_t$  μία ανέλιξη Ito με  $dY_t = H_t dW_t + G_t dt$ . Για κάθε  $t \geq 0$  ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f(t, Y_t) - f(0, Y_0) &= \int_0^t f^{(0,1)}(x, Y_x) dY_x + \int_0^t f^{(1,0)}(x, Y_x) dx + \frac{1}{2} \int_0^t f^{(0,2)}(x, Y_x) H_x^2 dx \\ &= \int_0^t f^{(0,1)}(x, Y_x) H_x dW_x + \int_0^t f^{(0,1)}(x, Y_x) G_x dx + \int_0^t f^{(1,0)}(x, Y_x) dx \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t f^{(0,2)}(x, Y_x) H_x^2 dx$$

(θεωρούμε ότι όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται είναι τέτοιες ώστε τα παραπάνω ολοκληρώματα να ορίζονται)

**Σχέδιο απόδειξης.** Όπως και στην παραπάνω απόδειξη του τύπου του Itô για συναρτήσεις της μορφής  $f(t, W_t)$ , χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor της  $f$  και καταλήγουμε στην εξίσωση (είναι η ακριβώς ίδια με την αντίστοιχη της παραπάνω απόδειξης μόνο που στη θέση της  $W_t$  εμφανίζεται τώρα η  $Y_t$ )

$$df(t, Y_t) = f^{(0,1)}(t, Y_t) dY_t + f^{(1,0)}(t, Y_t) dt + \frac{1}{2} f^{(0,2)}(t, Y_t) (dY_t)^2 + f^{(1,1)}(t, Y_t) dY_t dt + \frac{1}{2} f^{(2,0)}(t, Y_t) (dt)^2$$

Αλλά, αφού,  $(dW_t)^2 = dt$ ,  $dW_t dt = 0$ ,  $(dt)^2 = 0$ ,  $dY_t = H_t dW_t + G_t dt$ , θα είναι

$$(dY_t)^2 = (H_t dW_t + G_t dt)^2 = H_t^2 (dW_t)^2 + G_t^2 (dt)^2 + 2H_t G_t dW_t dt = H_t^2 dt,$$

και  $dY_t dt = 0$ , από όπου τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} df(t, Y_t) &= f^{(0,1)}(t, Y_t) dY_t + f^{(1,0)}(t, Y_t) dt + \frac{1}{2} f^{(0,2)}(t, Y_t) H_t^2 dt \\ &= f^{(0,1)}(t, Y_t) H_t dW_t + f^{(0,1)}(t, Y_t) G_t dt + f^{(1,0)}(t, Y_t) dt + \frac{1}{2} f^{(0,2)}(t, Y_t) H_t^2 dt. \end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν τη διαφορική μορφή των ολοκληρωτικών εξισώσεων που έπρεπε να αποδειχθούν.  $\square$

Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο (χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor μιας διμεταβλητής συνάρτησης) προκύπτει και το ακόλουθο Θεώρημα το οποίο για ευκολία διατυπώνεται σε διαφορική μορφή.

**Θεώρημα 5.7.2.** (τύπος του Itô για συναρτήσεις της μορφής  $f(X_t, Y_t)$ , όπου  $X_t, Y_t$  είναι δυο ανεξίτητες Itô). Έστω  $f(x, y): R^2 \rightarrow R$  μία συνάρτηση η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους  $\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x^j} f \equiv f^{(i,j)}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ , και  $X_t, Y_t$  δύο ανεξίτητες Ito. Για κάθε  $t \geq 0$  ισχύει ότι

$$\begin{aligned} df(X_t, Y_t) &= f^{(0,1)}(X_t, Y_t) dY_t + f^{(1,0)}(X_t, Y_t) dX_t + \frac{1}{2} f^{(0,2)}(X_t, Y_t) (dY_t)^2 \\ &\quad + f^{(1,1)}(X_t, Y_t) dY_t dX_t + \frac{1}{2} f^{(2,0)}(X_t, Y_t) (dX_t)^2 \end{aligned}$$

Αν θέσουμε  $f(x, y) = xy$  στο παραπάνω αποτέλεσμα, προκύπτει το επόμενο πόρισμα που είναι γνωστό ως πολλαπλασιαστικός κανόνας του Itô.

**Πόρισμα 5.7.1.** (Πολλαπλασιαστικός κανόνας του Itô). Αν  $X_t, Y_t$  είναι δύο ανεξίτητες Itô, τότε

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dY_t dX_t.$$

Κλείνοντας την σύντομη αυτή εισαγωγή στην στοχαστική ανάλυση παρουσιάζουμε δύο σημαντικά αποτελέσματα τα οποία θα αξιοποιήσουμε παρακάτω. Υπενθυμίζεται ότι στο μοντέ-

λο αγοράς διακριτού χρόνου είχαμε διαπιστώσει ότι μπορούμε να βρούμε την αξία ενός παραγώγου αρκεί να (α) υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας  $Q$  στον  $(\Omega, \mathcal{F})$  ως προς το οποίο η προεξοφλημένη ανέλιξη αξιών της υποκείμενης μετοχής είναι martingale και (β) υπάρχει αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με τελική αξία στο χρόνο  $T$  ίση με την αξία του παραγώγου στο χρόνο  $T$ . Θα επιχειρήσουμε να ακολουθήσουμε και εδώ τον ίδιο αποδεικτικό μηχανισμό. Για την διαπίστωση του (α) θα μας βοηθήσει το *θεώρημα του Girsanov* ενώ για το (β) θα μας βοηθήσει το *θεώρημα αναπαράστασης martingale* τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω χωρίς απόδειξη.

### 5.8. Αλλαγή μέτρου πιθανότητας – Θεώρημα Girsanov

Αν  $Z$  είναι μία τ.μ. από έναν χώρο  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  στο  $[0, \infty)$  με μέση τιμή 1 (και  $Z > 0$  με πιθαν. 1), τότε η συνολοσυνάρτηση  $Q: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  που σε κάθε ενδεχόμενο  $A$  του  $\mathcal{F}$  αντιστοιχεί την τιμή

$$Q(A) = \int_A Z dP = \int_{\Omega} Z I_A dP = E_P(Z \cdot I_A),$$

(όπου  $I_A = 1$  ή 0 ανάλογα με το αν το  $A$  πραγματοποιηθεί ή όχι) είναι ένα νέο μέτρο πιθανότητας στον χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Μάλιστα σε αυτή την περίπτωση, όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη παράγραφο, η τ.μ.  $Z$  καλείται *πυκνότητα* ή *Radon-Nikodym παράγωγος* του  $Q$  ως προς το  $P$ , δηλαδή συμβολικά,  $Z = dQ/dP$ .

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, για κάθε τ.μ.  $X$ ,

$$E_Q(X) = \int X dQ = \int X Z dP = E_P(X \cdot Z).$$

Έστω τώρα ότι ο χώρος  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  είναι εφοδιασμένος και με μια μελλοντική ιστορία  $\mathcal{F}_t, t \in [0, T]$ . Η στοχαστική ανέλιξη

$$Z_t = E_P(Z | \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T],$$

είναι ένα  $P$ -martingale διότι, για  $0 \leq s < t \leq T$ ,

$$E_P(Z_t | \mathcal{F}_s) = E_P(E_P(Z | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) = E_P(Z | \mathcal{F}_s) = Z_s, \quad t \in [0, T].$$

Επίσης αποδεικνύεται σχετικά εύκολα (αφήνεται ως άσκηση) ότι για  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,

$$E_Q(Y | \mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s} E_P(Y \cdot Z_t | \mathcal{F}_s)$$

για κάθε τ.μ.  $Y$  που είναι  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη.

**Παράδειγμα 5.8.1.** (Αλλαγή μέτρου πιθανότητας σε ένα χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$  από  $P$  σε  $Q$  που επιφέρει μετατόπιση της κατανομής μίας κανονικής τ.μ.). Έστω  $W: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $W \sim_P N(0, 1)$ . Ο συμβολισμός  $\sim_P$  υποδηλώνει κατανομή ως προς το μέτρο πιθανότητας  $P$ . Αν  $\theta$  είναι κάποια σταθερά, τότε προφανώς  $W + \theta \sim_P N(\theta, 1)$ . Ένα ερώτημα που μπορεί να τεθεί είναι αν μπορούμε να «αλλάξουμε» το μέτρο  $P$  σε ένα άλλο μέτρο πιθανότητας, έστω  $Q$ , έτσι ώστε, υπό αυτό το μέτρο, η τ.μ.  $W + \theta$  να ακολουθεί  $N(0, 1)$  (δηλαδή  $W + \theta \sim_Q N(0, 1)$ ). Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτό μπορεί να γίνει αν στον χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$  ορίσουμε το μέτρο  $Q$  όπως παραπάνω, λαμβάνοντας στη θέση της  $Z$  την τ.μ.

$$Z = e^{-\theta W - \frac{1}{2}\theta^2}.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τ.μ.  $Z$  διότι,  $Z > 0$  και  $E_P(Z) = 1$ . Υπό το  $Q$  τώρα, η τ.μ.  $W$  θα έχει κατανομή

$$Q(W \leq w) = E_P(Z \cdot I_{[W \leq w]}) = E_P(e^{-\theta W - \frac{1}{2}\theta^2} \cdot I_{[W \leq w]}) = \int_{-\infty}^w e^{-\theta x - \frac{1}{2}\theta^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^w e^{-\frac{1}{2}(x+\theta)^2} dx$$

και επομένως  $W \sim_Q N(-\theta, 1)$ , και άρα  $W + \theta \sim_Q N(0, 1)$ . Συμβολικά μπορούμε να γράψουμε  $P_W = Q_{W+\theta} = N(0, 1)$  όπου  $P_W$  είναι το επαγόμενο μέτρο του  $P$  στον  $R$  μέσω της τ.μ.  $W$  και  $Q_{W+\theta}$  είναι το επαγόμενο μέτρο του  $Q$  στον  $R$  μέσω της τ.μ.  $W + \theta$ ).

Έστω τώρα γενικότερα ένας χώρος  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  εφοδιασμένος με μια μελλοντική ιστορία  $\mathfrak{F}_t$  και  $W_t, t \geq 0 \sim \mathfrak{F}_t - \text{BM}(0, 1)$ . Υπονοείται ότι η  $W_t, t \geq 0$  είναι κίνηση Brown ως προς το μέτρο  $P$  και επομένως είναι ακριβέστερο να γράφουμε  $W_t \sim_P \text{BM}(0, 1)$ . Ένα αντίστοιχο πρόβλημα με αυτό που τέθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα είναι το ακόλουθο: Αν  $\Theta_t, t \geq 0$  είναι μία στοχαστική ανέλιξη η οποία είναι προσαρμοσμένη στην ιστορία  $\mathfrak{F}_t$  τότε μπορούμε να αλλάξουμε το μέτρο του χώρου από  $P$  σε  $Q$  έτσι ώστε η στοχαστική ανέλιξη

$$W_t + \int_0^t \Theta_x dx \sim_Q \mathfrak{F}_t - \text{BM}(0, 1);$$

Καταφατική απάντηση δίνει το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.8.1. (Girsanov).** Έστω χώρος  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  εφοδιασμένος με μια μελλοντική ιστορία  $\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]$  και  $W_t, t \in [0, T] \sim \mathfrak{F}_t - \text{BM}(0, 1)$ . Έστω επίσης  $\Theta_t, t \in [0, T]$  μία στοχαστική ανέλιξη προσαρμοσμένη στην ιστορία  $\mathfrak{F}_t$ . Η στοχαστική ανέλιξη

$$W'_t = W_t + \int_0^t \Theta_x dx \sim_Q \mathfrak{F}_t - \text{BM}(0, 1) \quad (\text{είναι κίνηση Brown ως προς το } Q)$$

όπου  $Q$  είναι το μέτρο πιθανότητας που σε κάθε  $A$  του  $\mathfrak{F}$  αντιστοιχεί το  $Q(A) = E_P(Z_T \cdot I_A)$  (συμβολικά  $dQ = Z_T dP$ ) με

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \Theta_x dW_x - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_x^2 dx\right).$$

(Είναι πράγματι  $E_P(Z_T) = 1$ , ενώ θεωρούμε και ότι  $E_P\left(\int_0^T \Theta_x^2 Z_x^2 dx\right) < \infty$ )

**Υπόδειξη απόδειξης.** Η απόδειξη βασίζεται στο εξής αποτέλεσμα (Θεώρημα Levy): αν μια στοχαστική ανέλιξη  $X_t$  με συνεχείς διαδρομές είναι martingale με  $X_0 = 0$ , και  $(dX_t)^2 = dt$  τότε  $X \sim \text{BM}(0, 1)$ . Αρκεί επομένως να αποδειχθεί ότι η ανέλιξη  $W'_t$  είναι martingale με συνεχείς διαδρομές,  $W'_0 = 0$ , και  $(dW'_t)^2 = dt$ .

**Παρατήρηση 5.8.1.** Η  $Z_t$  που δίνεται από τον παραπάνω τύπο αποδεικνύεται ότι είναι ίση με  $Z_t = E_P(Z_T | \mathfrak{F}_t)$ ,  $t \in [0, T]$  και επομένως (βλ. παραπάνω) για κάθε  $\mathfrak{F}_t$ -μετρήσιμη τ.μ.  $Y$ ,

$$E_Q(Y | \mathfrak{F}_s) = \frac{1}{Z_s} E_P(Y \cdot Z_t | \mathfrak{F}_s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

## 5.9. Θεώρημα Αναπαράστασης martingale

**Θεώρημα 5.9.1. (Αναπαράστασης martingale).** Έστω χώρος  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και  $W_t, t \in [0, T] \sim \text{BM}(0, 1)$ . Αν  $M_t, t \in [0, T]$  είναι ένα martingale ως προς την ιστορία  $\mathcal{F}_t, t \in [0, T]$ , που παράγεται από την  $W_t, t \in [0, T]$ , (δηλ.  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_x, x \leq t)$ ) τότε υπάρχει μία  $\mathcal{F}_t$ -προσαρμοσμένη ανέλιξη  $G_t, t \in [0, T]$  τέτοια ώστε

$$M_t = M_0 + \int_0^t G_x dW_x, \quad t \in [0, T].$$

Αποδείξαμε παραπάνω (Πρόταση 5.5.1) ότι κάθε ολοκλήρωμα Itô επί μιας  $W_t \sim \text{BM}(0, 1)$  είναι martingale ως προς την ιστορία που παράγεται από την  $W_t$ . Το Θεώρημα αναπαράστασης martingale ουσιαστικά λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο: κάθε martingale,  $M_t$ , ως προς μια ιστορία που παράγεται από την  $W_t$  μπορεί να παρασταθεί ως ένα ολοκλήρωμα Itô επί της  $W_t$  (συν μια σταθερά  $M_0$ ). Προσοχή εδώ στην απαίτηση ότι η  $M_t$  είναι martingale ως προς την ιστορία που παράγεται από την  $W_t$ . Αυτό σημαίνει ότι η  $M_t$  θα πρέπει να είναι  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_x, x \leq t)$ -μετρήσιμη,  $t \in [0, T]$ , δηλαδή η τιμή της  $M_t$  θα πρέπει να καθορίζεται πλήρως από την διαδρομή της  $W_x, x \leq t$ .