

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης σε Διακριτό Χρόνο - Διωνυμικό Μοντέλο Πολλών Περιόδων

4.1. Αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική σε διακριτό χρόνο

Ας θεωρήσουμε μια χρηματοοικονομική αγορά στην οποία διατίθενται προς διαπραγμάτευση κ χρηματοοικονομικοί τίτλοι. Συμβολίζουμε με Ω το χώρο των δυνατών καταστάσεων που μπορεί να βρεθεί η αγορά από σήμερα μέχρι ένα σημείο στο μέλλον και $\mathfrak{F}$ όλα τα δυνατά του ενδεχόμενα. Θα θεωρήσουμε ότι ο χρόνος είναι διακριτός και θα εξετάσουμε την αγορά στις διακριτές χρονικές στιγμές $t_0 < t_1 < \dots$. Στο χρόνο t_i θα είναι γνωστό για κάποια από τα ενδεχόμενα του Ω αν έχουν πραγματοποιηθεί ή όχι, και έστω $\mathfrak{F}_i$ η σ-άλγεβρα αυτών των ενδεχομένων. Σύμφωνα και με όσα έχουν διατυπωθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, η $\mathfrak{F}_i$ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει όλη την πληροφορία σχετικά με την κατάσταση που επικρατεί στην αγορά μέχρι και το χρόνο t_i . Προφανώς θα ισχύει ότι $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{F}$ και άρα η ακολουθία αυτή είναι ένα φιλτράρισμα.

Ας συμβολίσουμε με $S_i = (S_1(t_i), S_2(t_i), \dots, S_\kappa(t_i))$ το τυχαίο διάνυσμα των χρηματικών αξιών των κ τίτλων της αγοράς (π.χ. μετοχές, παράγωγα, ομόλογα, κ.ο.κ.) στο χρόνο t_i . Το τυχαίο διάνυσμα S_i προφανώς θα είναι $\mathfrak{F}_i$ -μετρήσιμο (στο χρόνο t_i θα είναι γνωστές οι αξίες όλων των τίτλων).

Ορισμός 4.1.1. Ένα *δυναμικό χαρτοφυλάκιο* (*dynamic portfolio*) ή *εμπορική ή επενδυτική στρατηγική* (*trading strategy*) είναι ένα σύνολο τίτλων μιας αγοράς του οποίου η σύνθεση μπορεί να αλλάζει (σε διακριτά χρονικά σημεία ή κάθε χρονική στιγμή) ανάλογα με την τρέχουσα και παρελθούσα κατάσταση της αγοράς (δηλαδή η σύνθεση δεν μπορεί να διαμορφώνεται με βάση κάποια πληροφορία από το «μέλλον»). Συμβολίζουμε με

$$\mathbf{x}_i = (x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_\kappa(t_i)),$$

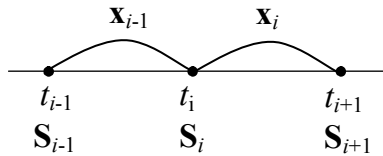
το διάνυσμα που εκφράζει το πλήθος των τεμαχίων των τίτλων 1, 2, ..., κ , που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο στο χρόνο t_i (ουσιαστικά στο $[t_i, t_{i+1})$). Όπως έχουμε υποθέσει (και είναι φυσιολογικό) η σύνθεση του διαμορφώνεται με βάση την τρέχουσα και παρελθούσα κατάσταση της αγοράς, δηλαδή το $\mathbf{x}_i$ θα είναι $\mathfrak{F}_i$ -μετρήσιμο. Η χρηματική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου στο χρόνο t_i θα είναι

$$V_i = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{S}'_i = \sum_{j=1}^{\kappa} x_j(t_i) S_j(t_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι και η συγκεκριμένη ακολουθία είναι προσαρμοσμένη στην μελλοντική ιστορία $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \dots$.

Ορισμός 4.1.2. Ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο με σύνθεση $\mathbf{x}_i = (x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_\kappa(t_i))$ στο χρόνο t_i καλείται *αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο* (*self-financing portfolio*) αν ισχύει ότι

$$\mathbf{x}_{i-1} \cdot \mathbf{S}'_i = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{S}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$



Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι, στο χρόνο t_i , η σύνθεσή του μπορεί να αλλάζει από $\mathbf{x}_{i-1}$ σε $\mathbf{x}_i$ χωρίς όμως να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε κάποια χρηματική αξία (π.χ. τα χρήματα που εισπράτουμε από ενδεχόμενη πώληση μετοχών τα επενδύουμε όλα σε άλλους τίτλους του χαρτοφυλακίου, π.χ. ομόλογα κ.ο.κ.). Η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο t_i παραμένει σταθερή. Αυτή η διαδικασία αλλαγής της σύνθεσης ενός δυναμικού χαρτοφυλακίου καλείται και *αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική* (self-financing investment strategy)

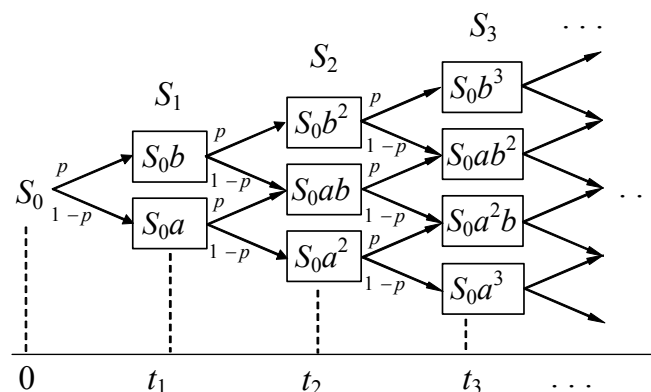
4.2. Διωνυμικό μοντέλο n περιόδων

Ας επανέλθουμε τώρα στο πρόβλημα εύρεσης της αξίας C (option price ή option premium) που θα πρέπει να έχει ένα συμβόλαιο προαίρεσης (αγοράς ή πώλησης, Ευρωπαϊκού τύπου) επί μιας μετοχής. Λύσαμε το πρόβλημα αυτό στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου λαμβάνοντας μια πρώτη εικόνα για το τι πρέπει να αναμένουμε στην γενική περίπτωση. Φυσικά το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου είναι πολύ απλό και δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει ικανοποιητικά την πραγματικότητα. Ένα πιο σύνθετο μοντέλο που προκύπτει φυσιολογικά γενικεύοντας το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου σε n περιόδους είναι το *διωνυμικό μοντέλο n περιόδων* το οποίο θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n χρονικά σημεία ($t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = nh = T$) και συμβολίζουμε με $S_0, S_1, \dots, S_n = S_T$ την τιμή της υποκείμενης μετοχής στους χρόνους αυτούς (S_0 γνωστή). Θεωρούμε ότι η τιμή S_1 θα είναι ίση είτε με $S_0 \cdot a$ είτε με $S_0 \cdot b$ ($0 < a < b$) τις οποίες λαμβάνει με κάποιες πιθανότητες, έστω $1 - p$ και p . Όμοια, η τιμή S_2 θα είναι ίση είτε με $S_1 \cdot a$ (με πιθαν. p) είτε με $S_1 \cdot b$ (με πιθαν. $1 - p$), κ.ο.κ. ... Δηλαδή,

$$S_i = S_{i-1} \cdot a \text{ (με πιθαν. } p) \text{ είτε με } S_{i-1} \cdot b \text{ (με πιθαν. } 1 - p), i = 1, 2, \dots, n.$$

Σχηματικά, η τιμή της μετοχής υποθέτουμε ότι κινείται ως εξής:



Υποθέτουμε όπως και στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου ότι $0 < a < e^{r \cdot h} < b$. Το παραπάνω μοντέλο καλείται *διωνυμικό μοντέλο n περιόδων*.

Στα παραπάνω υπονοείται ότι βρισκόμαστε σε ένα χώρο $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ όπου Ω είναι το σύνολο των καταστάσεων της αγοράς στο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Ο μικρότερος Ω που μπορούμε να θεωρήσουμε θα αποτελείται από στοιχεία της μορφής $\omega = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ όπου $c_i = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν στον χρόνο t_i έχουμε «άνοδο» ($S_i = S_{i-1}b$) ή «κάθοδο» ($S_i = S_{i-1}a$) της τιμής της μετοχής. Π.χ. η κατάσταση της αγοράς $\omega = (1, 0, 0, \dots, 1)$ υποδηλώνει ότι στο πρώτο χρόνο είχαμε άνοδο, στη συνέχεια πτώση της τιμής της μετοχής κ.ο.κ. Σε αυτό το χώρο μπορούμε να θεωρήσουμε ως σύνολο ενδεχομένων όλα τα υποσύνολα του Ω , δηλαδή $\mathfrak{F} = 2^\Omega$. Ο Ω θα αποτελείται από 2^n στοιχεία ενώ ο $\mathfrak{F}$ από 2^{2^n} ενδεχόμενα. Το μέτρο πιθανότητας P είναι αυτό που σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\omega = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ αντιστοιχεί πιθανότητα

$$P(\{\omega\}) = P(\{(c_1, c_2, \dots, c_n)\}) = p^{c_1} (1-p)^{1-c_1} \cdot p^{c_2} (1-p)^{1-c_2} \dots p^{c_n} (1-p)^{1-c_n} = p^{\sum_{i=1}^n c_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n c_i}.$$

Π.χ. $P((1, 0, 0, \dots, 1)) = p(1-p)(1-p) \dots p$. Η πιθανότητα κάθε άλλου ενδεχομένου προκύπτει από το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχειωδών ενδεχομένων από τα οποία απαρτίζεται. Για $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, η τ.μ. S_k είναι η απεικόνιση $S_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία απεικονίζει κάθε $\omega \in \Omega$ στο

$$S_k(\omega) = S_k((c_1, c_2, \dots, c_n)) = S_0 \cdot b^{\sum_{i=1}^k c_i} a^{k-\sum_{i=1}^k c_i}.$$

Σύμφωνα και με αναφορές στο προηγούμενο κεφάλαιο, ολόκληρη η στοχαστική ανέλιξη $S_0, S_1, \dots, S_n$ μπορεί εναλλακτικά να θεωρηθεί και ως μία απεικόνιση από το Ω στο σύνολο των συναρτήσεων από το $\{0, 1, \dots, n\}$ στο $\mathbb{R}$ ώστε σε κάθε $\omega \in \Omega$ («κατάσταση αγοράς») στους χρόνους $t_1, t_2, \dots, t_n$ αντιστοιχεί την συνάρτηση (ή πεπερασμένη ακολουθία) g_ω με

$$g_\omega(k) = S_k(\omega), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται και «διαδρομή» της ανέλιξης S_i , $i=1, 2, \dots, n$. Πολύ απλά μπορούμε να πούμε ότι, σε κάθε «κατάσταση της αγοράς» αντιστοιχεί μία «διαδρομή» της τιμής της μετοχής.

Τη χρονική στιγμή t_i θα γνωρίζουμε πως έχει κινηθεί η αγορά μέχρι το χρόνο αυτό, δηλαδή θα γνωρίζουμε τα $c_1, c_2, \dots, c_i$ (όχι όμως ποιο $\omega = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ θα πραγματοποιηθεί τελικά) δηλαδή θα γνωρίζουμε για καθένα από τα ενδεχόμενα της μορφής

$$A = [S_1 = s_1, \dots, S_i = s_i] \in \mathfrak{F}$$

αν έχει πραγματοποιηθεί ή όχι. Έστω $\mathfrak{F}_i$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από αυτά τα ενδεχόμενα. Π.χ η $\mathfrak{F}_1$ παράγεται από τα ενδεχόμενα

$$A_1 = \{(0, c_2, \dots, c_n), c_i \in \{0, 1\}\} = [S_1 = S_0 a], \quad A_2 = \{(1, c_2, \dots, c_n), c_i \in \{0, 1\}\} = [S_1 = S_0 b],$$

και επομένως $\mathfrak{F}_1 = \{\emptyset, A_1, A_2, \Omega\}$, ενώ η $\mathfrak{F}_2$ από τα ενδεχόμενα

$$B_1 = \{(0, 0, c_3, \dots, c_n), c_i \in \{0, 1\}\} = [S_2 = S_0 a^2, S_1 = S_0 a],$$

$$B_2 = \{(0, 1, c_3, \dots, c_n), c_i \in \{0, 1\}\} = [S_2 = S_0 ab, S_1 = S_0 a],$$

$$B_3 = \{(1, 0, c_3, \dots, c_n), c_i \in \{0, 1\}\} = [S_2 = S_0 ba, S_1 = S_0 b],$$

$$B_4 = \{(1, 1, c_3, \dots, c_n), c_i \in \{0, 1\}\} = [S_2 = S_0 b^2, S_1 = S_0 b],$$

και επομένως $\mathfrak{F}_2 = \{\emptyset, B_1, B_2, B_3, B_4, B_1 \cup B_2, B_1 \cup B_3, B_1 \cup B_4, B_2 \cup B_3, B_2 \cup B_4, B_3 \cup B_4, B_1 \cup B_2 \cup B_3, B_1 \cup B_2 \cup B_4, B_1 \cup B_3 \cup B_4, B_2 \cup B_3 \cup B_4, \Omega\}$, κ.ο.κ. για τις $\mathfrak{F}_3, \dots, \mathfrak{F}_n$. Η $\mathfrak{F}_i$ μπορεί να θεωρηθεί ως η πληροφορία που θα έχουμε για την κατάσταση της αγοράς μέχρι και το χρόνο t_i (στο χρόνο αυτό

θα γνωρίζουμε ποια ενδεχόμενά της έχουν πραγματοποιηθεί και ποιά όχι). Προφανώς η ακολουθία $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$ είναι μία μελλοντική ιστορία (φιλτράρισμα) και η ακολουθία των τιμών $S_1, S_2, \dots, S_n$ είναι προσαρμοσμένη σε αυτήν. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ουσιαστικά πρόκειται για το φυσικό φιλτράρισμα, $\mathfrak{F}_k = \sigma(S_1, S_2, \dots, S_k)$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο χρόνο 0 δεν θα είναι γνωστή καμία πληροφορία, δηλαδή $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Στο χώρο Ω μπορούμε να ορίσουμε και ένα άλλο μέτρο πιθανότητας, ανάλογο αυτού που «εμφανίστηκε» στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου και αποκαλέσαμε μέτρο πιθανότητας σε ένα κόσμο ουδέτερου ρίσκου.

Ορισμός 4.2.1. («κόσμος ουδέτερου ρίσκου») Ο χώρος $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$ με $\Omega, \mathfrak{F}$ όπως παραπάνω και Q το μέτρο πιθανότητας που σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\omega = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ αντιστοιχεί πιθανότητα

$$Q(\{\omega\}) = Q(\{(c_1, c_2, \dots, c_n)\}) = q^{\sum_{i=1}^n c_i} (1-q)^{n-\sum_{i=1}^n c_i}, \quad q = \frac{e^{r \cdot h} - a}{b - a}.$$

καλείται «κόσμος ουδέτερου ρίσκου» και το μέτρο πιθανότητας Q αντίστοιχα καλείται μέτρο πιθανότητας (σε ένα κόσμο) ουδέτερου ρίσκου.

Στο χώρο $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$ η τιμή της μετοχής κινείται πάνω ή κάτω με πιθανότητες q και $(1-q)$. Το Q δεν είναι το πραγματικό μέτρο πιθανότητας που ισχύει στον «πραγματικό κόσμο» $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ αλλά χρησιμοποιείται για να δώσει καλύτερη ερμηνεία στα αποτελέσματα που θα ακολουθήσουν (βλ. και ανάλογα σχόλια στο μοντέλο μιας περιόδου).

Φυσικά στα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε πολύ μεγαλύτερους χώρους καταστάσεων Ω στους οποίους π.χ. κάθε ω θα περιγράφει όλη την ιστορία της αγοράς (όσες παραμέτρους χαρακτηρίζουν την αγορά) στο χρονικό διάστημα $[0, \infty)$. Σε τέτοιους χώρους ίσως είναι δύσκολο να ορίσουμε επακριβώς το σύνολο των ενδεχομένων καθώς και το μέτρο πιθανότητας P . Μπορούμε όμως να ορίσουμε το P πάνω σε ενδεχόμενα της μορφής $[S_1 = S_0 b, S_2 = S_0 a b, \dots, S_n = S_0 a^k b^{n-k}]$ που δείχνουν την «διαδρομή» της τιμής της μετοχής, κ.ο.κ.

Με βάση τώρα το παραπάνω διωνυμικό μοντέλο n περιόδων αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.2.1. (*risk neutral pricing formula*) Η *no-arbitrage* τιμή (στο χρόνο 0) ενός δικαιώματος αγοράς (Ευρωπαϊκού τύπου, με ημερομηνία λήξης T , τιμή εξάσκησης K) στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων είναι ίση με

$$C = e^{-rT} \cdot E_Q(S_n - K)_+,$$

όπου Q είναι το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου. Δηλαδή είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του παραγώγου σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου.

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε ότι στην αγορά διατίθενται οι παρακάτω τρεις τίτλοι:

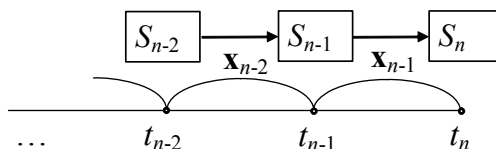
- (1) Ο τίτλος 1 είναι ένα ομόλογο επί μιας χρηματικής μονάδας (στο χρόνο 0), με επιτόκιο r (δηλαδή στο χρόνο t προσφέρει απόδοση e^{rt}),
- (2) Ο τίτλος 2 είναι η υποκείμενη μετοχή (π.χ. AAA), με αξία S_i στο χρόνο t_i .
- (3) Ο τίτλος 3 είναι το *long call* συμβόλαιο επί 1 μετοχής AAA με exercise price K , option price C και exercise date T με αξία U_i στο χρόνο t_i .

Το διάνυσμα των αξιών των τριών παραπάνω τίτλων στο χρόνο t_i θα είναι

$$\mathbf{S}_i = (e^{r \cdot ih}, S_i, U_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Επίσης θεωρούμε ότι έχουμε στην κατοχή μας ένα (δυναμικό) αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με σύνθεση $\mathbf{x}_i = (\psi_i, \Delta_i, 0)$ στο χρόνο t_i . Στο χρόνο 0, το χαρτοφυλάκιο αυτό αποτελείται από ένα ομόλογο στο οποίο έχει επενδυθεί ποσό ψ_0 και Δ_0 μετοχές. Επιθυμούμε να διαμορφώσουμε μια αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική (δηλαδή μια ακολουθία συνθέσεων $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ του χαρτοφυλακίου) η οποία θα μας εξασφαλίζει έναντι του κινδύνου κατοχής ενός long call συμβολαίου. Δηλαδή επιθυμούμε να κατασκευάσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης το οποίο θα έχει τελική αξία (στο χρόνο T) ίση με το συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς.

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στο χρόνο t_{n-1} στον οποίο (ήδη από το χρόνο t_{n-2}) κατέχουμε το χαρτοφυλάκιο $\mathbf{x}_{n-2} = (\psi_{n-2}, \Delta_{n-2}, 0)$ το οποίο και αναθεωρούμε στο $\mathbf{x}_{n-1} = (\psi_{n-1}, \Delta_{n-1}, 0)$. Στο χρόνο t_{n-1} θα γνωρίζουμε την τιμή της μετοχής S_{n-1} η οποία, στο επόμενο χρονικό σημείο t_n , θα γίνει ίση είτε με $S_{n-1} \cdot a$ είτε με $S_{n-1} \cdot b$ (με πιθανότητες p και $1 - p$ αντίστοιχα). Αν θεωρήσουμε το μοντέλο αυτό μόνο στα δύο χρονικά σημεία t_{n-1} και t_n , τότε έχουμε ουσιαστικά να κάνουμε με ένα μοντέλο ισοδύναμο με το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου.



Όπως και στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου, θα προσδιορίσουμε το $\mathbf{x}_{n-1}$ ώστε να έχει το χαρτοφυλάκιο αυτό αξία στο χρόνο T ίση με το δικαίωμα προαίρεσης. Θα πρέπει, στο χρόνο t_n ,

$$\mathbf{x}_{n-1} \cdot \mathbf{S}'_n = \psi_{n-1} \cdot e^{r \cdot nh} + \Delta_{n-1} S_n = U_n,$$

όπου, ως γνωστό, $U_n = (S_n - K)_+$. Εργαζόμενοι όμοια με το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\begin{cases} \psi_{n-1} \cdot e^{r \cdot nh} + \Delta_{n-1} S_{n-1} b = (S_{n-1} b - K)_+ \\ \psi_{n-1} \cdot e^{r \cdot nh} + \Delta_{n-1} S_{n-1} a = (S_{n-1} a - K)_+ \end{cases}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\Delta_{n-1} = \frac{(S_{n-1} b - K)_+ - (S_{n-1} a - K)_+}{S_{n-1} (b - a)}, \quad \psi_{n-1} = e^{-r \cdot nh} \frac{b(S_{n-1} a - K)_+ - a(S_{n-1} b - K)_+}{b - a}.$$

Συνεπώς, το χαρτοφυλάκιο μας στο χρόνο t_{n-1} , θα έχει αξία

$$\mathbf{x}_{n-1} \cdot \mathbf{S}'_{n-1} = \psi_{n-1} \cdot e^{r \cdot (n-1)h} + \Delta_{n-1} S_{n-1} = e^{-r \cdot h} (q(S_{n-1} b - K)_+ + (1 - q)(S_{n-1} a - K)_+)$$

όπου $q = (e^{r \cdot h} - a)/(b - a)$, η πιθανότητα μεταπήδησης σε ένα κόσμο ουδέτερου ρίσκου. Ανάλογα και με όσα έχουμε αναπτύξει στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου, θα πρέπει η no-arbitrage αξία του long call στο χρόνο t_{n-1} να είναι ίση με την παραπάνω αξία του χαρτοφυλακίου, δηλαδή,

$$U_{n-1} = e^{-r \cdot h} (q(S_{n-1} b - K)_+ + (1 - q)(S_{n-1} a - K)_+) = e^{-r \cdot h} \cdot E_Q(U_n | \mathfrak{F}_{n-1}).$$

Θα κάνουμε το ίδιο για το βήμα από τον χρόνο t_{n-2} στο t_{n-1} . Ας υποθέσουμε τώρα ότι βρισκόμαστε στο χρόνο t_{n-2} και συνεπώς θα γνωρίζουμε την τιμή S_{n-2} . Η τιμή αυτή στο επόμενο χρονικό σημείο t_{n-1} θα γίνει $S_{n-2} \cdot a$ ή $S_{n-2} \cdot b$. Αν θεωρήσουμε το μοντέλο αυτό μόνο στα δύο χρονικά σημεία t_{n-2} και t_{n-1} , τότε έχουμε και πάλι να κάνουμε με ένα μοντέλο ισοδύναμο με το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου. Θα πρέπει, στο χρόνο t_{n-1} ,

$$\mathbf{x}_{n-2} \cdot \mathbf{S}'_{n-1} = \psi_{n-2} \cdot e^{r \cdot (n-1)h} + \Delta_{n-2} S_{n-1} = U_{n-1}$$

Η αξία U_{n-1} όταν βρισκόμαστε στο χρόνο t_{n-1} έχει βρεθεί στο προηγούμενο βήμα και όπως είναι αναμενόμενο εξαρτάται από την τιμή της μετοχής σε εκείνο το χρόνο. Έστω γενικά τώρα ότι η αξία U_i του παραγώγου έχει υπολογισθεί την χρονική στιγμή t_i . Προφανώς θα εξαρτάται και από την τιμή S_i της μετοχής εκείνη την χρονική στιγμή. Συμβολίζουμε με $v_i(s)$ την αξία U_i του παραγώγου όταν βρισκόμαστε στον χρόνο t_i με $S_i = s$. Εργαζόμενοι όμοια με το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου θα πρέπει

$$\begin{cases} \psi_{n-2} \cdot e^{r \cdot (n-1)h} + \Delta_{n-2} S_{n-2} b = v_{n-1}(S_{n-2} b) \\ \psi_{n-2} \cdot e^{r \cdot (n-1)h} + \Delta_{n-2} S_{n-2} a = v_{n-1}(S_{n-2} a) \end{cases}$$

και επομένως

$$\Delta_{n-2} = \frac{v_{n-1}(S_{n-2} b) - v_{n-1}(S_{n-2} a)}{(S_{n-2} b - S_{n-2} a)}, \quad \psi_{n-2} = e^{-r(n-1)h} \frac{b \cdot v_{n-1}(S_{n-2} a) - a \cdot v_{n-1}(S_{n-2} b)}{(b - a)}.$$

Συνεπώς, το χαρτοφυλάκιό μας στο χρόνο t_{n-2} , θα έχει no-arbitrage αξία

$$\begin{aligned} U_{n-2} &= \mathbf{x}_{n-2} \cdot \mathbf{S}'_{n-2} = \psi_{n-2} \cdot e^{r \cdot (n-2)h} + \Delta_{n-2} S_{n-2} = e^{-rh} \left(\frac{b - e^{rh}}{b - a} v_{n-1}(S_{n-2} a) + \frac{e^{rh} - a}{b - a} v_{n-1}(S_{n-2} b) \right) \\ &= e^{-rh} ((1 - q) v_{n-1}(S_{n-2} a) + q v_{n-1}(S_{n-2} b)) = e^{-rh} E_Q(U_{n-1} | \mathfrak{F}_{n-2}). \end{aligned}$$

Αλλά, έχουμε ήδη βρει ότι $U_{n-1} = e^{-rh} \cdot E_Q(U_n | \mathfrak{F}_{n-1})$ και επομένως,

$$U_{n-2} = e^{-rh} E_Q(U_{n-1} | \mathfrak{F}_{n-2}) = e^{-rh} E_Q(e^{-rh} \cdot E_Q(U_n | \mathfrak{F}_{n-1}) | \mathfrak{F}_{n-2}) = e^{-2rh} E_Q(U_n | \mathfrak{F}_{n-2}).$$

Επαγωγικά επομένως αποδεικνύεται ότι

$$U_k = e^{-r(n-k)h} E_Q(U_n | \mathfrak{F}_k),$$

από όπου προκύπτει τελικά ότι $C = U_0 = e^{-rT} E_Q(U_n | \mathfrak{F}_0) = e^{-rT} E_Q(U_n) = e^{-rT} E_Q(S_n - K)_+ . \square$

Παρατηρούμε ότι η αποδεικτική διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε στο παραπάνω αποτέλεσμα και αφορούσε την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς, θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν, αρκεί αυτό να μπορούσε να εξασκηθεί μόνο κατά το χρόνο λήξης του (Ευρωπαϊκού τύπου). Τέτοια παράγωγα έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο (δικαιώματα αγοράς, πώλησης). Υπάρχουν όμως και παράγωγα Ευρωπαϊκού τύπου που έχουν πιο σύνθετους όρους (π.χ. Barrier, Asian, Lookback κ.α., βλ. τελευταίο κεφάλαιο) και που η αξία τους μπορεί να βρεθεί με τον ίδιο τρόπο. Ο γενικότερος ορισμός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος που μπορεί να καλυφθεί από την παραπάνω αποδεικτική διαδικασία είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 4.2.2. Θα καλούμε «απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου» με χρόνο λήξης $t_n = T$, μια $\mathfrak{F}_n$ – μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή U_n .

Με τον ίδιο λοιπόν τρόπο αποδεικνύεται το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.2.2. (*risk neutral pricing formula*) Η no-arbitrage τιμή (στο χρόνο 0) ενός απλού παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος (ευρωπαϊκού τύπου, με ημερομηνία λήξης T) στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων είναι ίση με

$$C = e^{-rT} \cdot E_Q(U_n),$$

όπου Q είναι το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου. Δηλαδή είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του δικαιώματος αγοράς σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου. Γενικότερα, στο χρόνο t_k , $k = 0, 1, \dots, n$, η no-arbitrage αξία του παραγώγου αυτού θα είναι

$$U_k = e^{-r(T-t_k)} E_Q(U_n | \mathfrak{F}_k).$$

Απόδειξη. Είναι η ίδια με την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, μόνο που στη θέση του τίτλου 3 θεωρείται το «απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου» επί 1 μετοχής AAA με option price C και exercise date T . Ως συνέπεια, στη θέση του $(S - K)_+$ στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιείται το U_n .

Παρατήρηση 4.2.1. Από την παραπάνω απόδειξη επίσης είναι ενδιαφέρουσα η παρατήρηση ότι ένα απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν (ευρωπαϊκού τύπου) «ισοδυναμεί» (στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων) με ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης που στο χρόνο t_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, θα αποτελείται από

$$\Delta_k = \frac{v_{k+1}(S_k b) - v_{k+1}(S_k a)}{S_k b - S_k a} \text{ μετοχές}$$

και

$$\psi_k = e^{-r(k+1)h} \frac{b \cdot v_{k+1}(S_k a) - a \cdot v_{k+1}(S_k b)}{b - a} \text{ ποσό επενδυμένο σε ομόλογα}$$

όπου, όπως και στην απόδειξη, $v_i(s)$ είναι η αξία U_i του παραγώγου όταν βρισκόμαστε στον χρόνο t_i και είναι γνωστό ότι $S_i = s$. Είναι προφανές ότι οι Δ_k , ψ_k είναι $\mathfrak{F}_k$ – μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές (η τιμή τους εξαρτάται από τα $S_0, S_1, \dots, S_k$), δηλαδή η τιμή τους θα είναι γνωστή στο χρόνο t_k και όχι νωρίτερα. Από την παραπάνω απόδειξη είναι εύκολο να δούμε ότι η Δ_k γράφεται εναλλακτικά,

$$\Delta_k = \frac{V_{k+1} - e^{rh} V_k}{S_{k+1} - e^{rh} S_k} \equiv \frac{\delta V_k}{\delta S_k}.$$

Δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος παραγώγου συνάρτησης (σε διακριτό χρόνο) της τιμής V του παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος ως προς την τιμή S της υποκείμενης μετοχής στο χρόνο t_k (βλ. ανάλογα σχόλια στην παρακάτω παράγραφο 6.4. που αναφέρεται στρατηγική εξασφάλισης Δέλτα – Delta Hedging)

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.2.1. μας δίνει μια εικόνα για το τι περίπου θα πρέπει να αποδείξουμε και σε πιο ρεαλιστικά μοντέλα συνεχούς χρόνου. Αυτό που λείπει στην παρούσα φάση είναι ο τρόπος με τον οποίο θα το αποδείξουμε, διότι η παραπάνω απόδειξη δεν μπορεί να γενικευτεί με αυστηρό τρόπο σε μοντέλα συνεχούς χρόνου. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε

το παραπάνω αποτέλεσμα υπό μια άλλη οπτική γωνία από την οποία μπορούμε να διακρίνουμε καλύτερα την βαθύτερη αιτία που οδηγούμαστε σε αυτό.

4.3. Η no-arbitrage αξία παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων σε μοντέλο n περιόδων.

Σε αυτή την παράγραφο θα εξακολουθήσουμε να θεωρούμε το χρόνο διακριτό, αλλά θα εξετάσουμε ένα γενικότερο μοντέλο για την κίνηση της τιμής της μετοχής.

Θεωρούμε ως μοντέλο διακριτού χρόνου n περιόδων ένα μοντέλο της αγοράς το οποίο εξετάζεται στα χρονικά σημεία $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = nh = T$, χωρίς να κάνουμε τώρα κάποια υπόθεση για τον τρόπο με τον οποίο κινείται η τιμή της μετοχής. Και εδώ συμβολίζουμε με $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ το αντίστοιχο χώρο πιθανότητας και με $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n$, την μελλοντική ιστορία που αντιστοιχεί στους χρόνους $t_0, t_1, \dots, t_n$.

Ας θεωρήσουμε ένα (δυναμικό) αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με σύνθεση $\mathbf{x}_k = (\psi_k, \Delta_k, 0)$, στο χρόνο t_k , δηλαδή, $\mathbf{x}_{k-1} \cdot \mathbf{S}'_k = \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{S}'_k, k = 1, 2, \dots, n$, όπου $\mathbf{S}_k = (e^{r \cdot kh}, S_k, U_k)$ όπως παραπάνω. Στο μοντέλο διακριτού χρόνου n περιόδων (όχι απαραίτητα το διωνυμικό) ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.3.1. Αν υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας Q στον $(\Omega, \mathfrak{F})$ τέτοιο ώστε η ακολουθία των (προεξοφλημένων) τιμών της μετοχής $e^{-rt_k} S_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$, είναι Q -martingale ως προς την μελλοντική ιστορία $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$, τότε και η ακολουθία των τιμών

$$V_k^* = e^{-rt_k} \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{S}'_k, k = 0, 1, \dots, n,$$

(προεξοφλημένη αξία ενός αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου στους χρόνους $t_0, t_1, \dots, t_n$) είναι ένα Q -martingale ως προς την ίδια μελλοντική ιστορία (υποθ. ότι $E_Q(|\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{S}'_i|) < \infty$.)

Απόδειξη. Το $\mathbf{x}_k$ θα είναι $\mathfrak{F}_k$ -μετρήσιμο από ορισμό και το ίδιο ισχύει για την τιμή S_k . Επομένως η ακολουθία $V_k^* = e^{-rt_k} \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{S}'_k, i = 0, 1, \dots, n$, είναι προσαρμοσμένη στην παραπάνω ιστορία. Επίσης, η ακολουθία αυτή είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη (από υπόθεση). Τέλος, για $k = 0, 1, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} E_Q(V_{k+1}^* | \mathfrak{F}_k) &= E_Q(e^{-rt_{k+1}} \mathbf{x}_{k+1} \cdot \mathbf{S}'_{k+1} | \mathfrak{F}_k) = E_Q(e^{-rt_{k+1}} \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{S}'_{k+1} | \mathfrak{F}_k) = E_Q(e^{-rt_{k+1}} (\psi_k e^{rt_{k+1}} + \Delta_k S_{k+1}) | \mathfrak{F}_k) \\ &= E_Q(\psi_k + e^{-rt_{k+1}} \Delta_k S_{k+1} | \mathfrak{F}_k) = \psi_k + \Delta_k E_Q(e^{-rt_{k+1}} S_{k+1} | \mathfrak{F}_k) \\ &= \psi_k + \Delta_k e^{-rt_k} S_k = e^{-rt_k} (e^{rt_k} \psi_k + \Delta_k S_k) = e^{-rt_k} \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{S}'_k = V_k^*. \end{aligned}$$

□

Είναι εύκολο να δούμε ότι στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων η ακολουθία $e^{-rt_k} S_k, k = 0, 1, \dots, n$, πληροί τις υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος.

Θεώρημα 4.3.2. Στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων η ακολουθία των τιμών $S_k^* = e^{-rt_k} S_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$ είναι ένα Q -martingale ως προς την μελλοντική ιστορία $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$ όπου Q είναι το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου.

Απόδειξη. Η ακολουθία των τιμών $S_k^* = e^{-rt_k} S_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, είναι προσαρμοσμένη στην παραπάνω ιστορία. Επίσης, $E(e^{-rt_k} S_k) < \infty$, και

$$\begin{aligned} E_Q(S_{k+1}^* | \mathfrak{F}_k) &= E_Q(e^{-rt_{k+1}} S_{k+1} | \mathfrak{F}_k) = e^{-rt_{k+1}} (q \cdot S_k b + (1-q) \cdot S_k a) \\ &= e^{-rt_{k+1}} \left(\frac{e^{r \cdot h} - a}{b - a} \cdot S_k b + \frac{b - e^{r \cdot h}}{b - a} \cdot S_k a \right) = e^{-rt_k} S_k = S_k^*. \end{aligned}$$

□

Επομένως, στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων η ακολουθία των τιμών $V_k^* = e^{-rt_k} \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{S}'_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ (προεξοφλημένη ακολουθία αξιών οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου) είναι ένα Q -martingale. Επίσης είναι χρήσιμος ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 4.3.1. Ένα απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου, U_n , καλείται *hedgeable* αν υπάρχει ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει τελική αξία ίση με U_n . Μία αγορά (ένα μοντέλο διακριτού χρόνου n περιόδων) καλείται *πλήρης* αν κάθε απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου είναι *hedgeable*.

Στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων είδαμε ότι για κάθε απλό παράγωγο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Το χαρτοφυλάκιο αυτό στο χρόνο t_k θα αποτελείται από

$$\Delta_k = \frac{v_{k+1}(S_k b) - v_{k+1}(S_k a)}{S_k b - S_k a} \text{ μετοχές, και } \psi_k = e^{-r(k+1)h} \frac{b \cdot v_{k+1}(S_k a) - a \cdot v_{k+1}(S_k b)}{b - a} \text{ ποσό επενδυμένο σε ομόλογα}$$

Επομένως, έχουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 4.3.1. Η αγορά που περιγράφεται από το διωνυμικό μοντέλο n περιόδων είναι *πλήρης* (κάθε απλό παράγωγο προϊόν είναι *hedgeable*).

Έχει ενδιαφέρον να δούμε τώρα τι ισχύει για ένα *hedgeable* παράγωγο προϊόν σε ένα διακριτό μοντέλο n περιόδων (όχι απαραίτητα το διωνυμικό).

Θεώρημα 4.3.3. Έστω ένα απλό παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου, U_n , (επί μιας μετοχής) σε ένα διακριτό μοντέλο n περιόδων:

(i) αν υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας Q ως προς το οποίο η ακολουθία των (προεξοφλημένων) τιμών της μετοχής $S_k^* = e^{-rt_k} S_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, είναι *martingale* (ως προς $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$) και

(ii) αν το U_n είναι *hedgeable*,

τότε η *no-arbitrage* αξία, U_k , του παραγώγου στο χρόνο t_k , $k = 0, 1, \dots, n$, θα δίνεται από τον τύπο

$$U_k = e^{-r(T-t_k)} E_Q(U_n | \mathfrak{F}_k).$$

Απόδειξη. Αφού το παράγωγο προϊόν είναι *hedgeable*, θα υπάρχει ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με σύνθεση $\mathbf{x}_k$ στο χρόνο t_k , $k = 1, 2, \dots, n$ για το οποίο θα ισχύει ότι

$$\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{S}'_n = U_n.$$

Επομένως, η *no-arbitrage* αξία του παραγώγου στο χρόνο t_k θα είναι

$$U_k = \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{S}'_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Αν δεν ισχύει η παραπάνω ισότητα μπορεί κανείς να αγοράσει το πιο «φθηνό» και να πωλήσει το πιο «ακριβό» από τα δύο (το παράγωγο ή το χαρτοφυλάκιο) στο χρόνο t_k και να κλείσει την όποια ανοικτή θέση του στο χρόνο t_n έχοντας αποκομίσει σίγουρο κέρδος (arbitrage). Από το (i) τώρα του θεωρήματος, θα υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας Q ως προς το οποίο η ακολουθία $S_k^* = e^{-rt_k} S_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ είναι martingale. Από παραπάνω θεώρημα προκύπτει τότε ότι και η ακολουθία των τιμών

$$V_k^* = e^{-rt_k} \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{S}'_k, k = 1, 2, \dots, n,$$

θα είναι ένα Q -martingale ως προς την $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$. Επομένως, $V_k^* = E_Q(V_n^* | \mathfrak{F}_k)$, $k \leq n$, από όπου προκύπτει τελικά ότι

$$U_k = e^{rt_k} V_k^* = e^{rt_k} E_Q(V_n^* | \mathfrak{F}_k) = e^{rt_k} E_Q(e^{-rt_n} U_n | \mathfrak{F}_k) = e^{-r(t_n - t_k)} E_Q(U_n | \mathfrak{F}_k) \dots$$

□

Σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, η no-arbitrage τιμή ενός οποιουδήποτε hedgeable παραγώγου προϊόντος (Ευρωπαϊκού τύπου) είναι ίση με την παρούσα αξία του Q -αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του, όπου Q είναι ένα μέτρο πιθανότητας ως προς το οποίο η ακολουθία $e^{-rt_k} S_k$, $k = 0, 1, \dots, n$ είναι martingale.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

Άσκηση 1. Έστω ότι σε μία αγορά (με ετήσιο επιτόκιο ομολόγων r) διατίθενται δικαιώματα αγοράς και πώλησης επί μιας μετοχής AAA με χρόνο λήξης T και τιμή εξάσκησης K . Η τιμή της υποκείμενης μετοχής είναι σήμερα ($t_0 = 0$) ίση με S_0 ενώ μπορεί να αλλάξει κατά τους χρόνους $t_1 = T/2$ και $t_2 = T$. Σε καθένα από αυτούς τους χρόνους μπορεί ποσοστιαία να αυξηθεί κατά d_1 ή να μειωθεί κατά $d_2 = 10\%$ (διωνυμικό μοντέλο 2 περιόδων). (α) Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή ισορροπίας (no-arbitrage) C ενός call option (Ευρωπαϊκού τύπου) επί της μετοχής αυτής; (β) Εφαρμόστε τον γενικό τύπο για $S_0 = 100$; $d_1 = 12\%$, $d_2 = 10\%$, $T = 2$ μήνες, $r = 5\%$, $K = 95, 100, 105$.

Άσκηση 2. Να κάνετε και πάλι στην Άσκηση 1, αυτή τη φορά για put option (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το put-call parity).

Άσκηση 3. Στο μοντέλο που περιγράφεται από την Άσκηση 1, κατασκευάστε ένα (αυτοχρηματοδοτούμενο) χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης (για το call option) το οποίο στο χρόνο $t_0 = 0$ θα αποτελείται από ψ_0 ομόλογα και Δ_0 μετοχές ενώ στο χρόνο $t_1 = T/2$ θα αποτελείται από ψ_1 ομόλογα και Δ_1 μετοχές. (α) Βρείτε τους γενικούς τύπους που περιγράφουν τις τιμές των ψ_i , Δ_i και (β) εφαρμόστε και πάλι για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων που δίνονται στην Άσκηση 1. (γ) Αν η τιμή της μετοχής κινηθεί δύο φορές ανοδικά, ποια θα πρέπει να είναι η σύνθεση αυτού του χαρτοφυλακίου στους χρόνους t_0 και t_1 .

Άσκηση 4. Στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων, (α) να εκφράσετε τις πιθανότητες (στον $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ και $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$ αντίστοιχα)

$$P(S_n = S_0 b^x a^{n-x}), \quad Q(S_n = S_0 b^x a^{n-x})$$

(β) Αν για ευκολία θέσουμε $b = e^\rho$, $a = e^{-\rho}$, για κάποια κατάλληλη σταθερά $\rho > rT/n$, ποια είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$Y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \ln \frac{S_n}{S_0} + n \right),$$

στον $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ και στον $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$. Ποια είναι η no-arbitrage αξία ενός απλού παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος στο χρόνο 0 αν έχει αξία στο χρόνο λήξης του, T , ίση με $U_n = \ln(S_n/S_0)$.

(γ) Αποδείξτε ότι η τ.μ. S_n έχει (στον $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$) την ίδια κατανομή με την τυχαία μεταβλητή $S_0 e^{(2B-n)\rho}$ όπου $B \sim \text{Διωνυμική}$ με παραμέτρους n και q . Αποδείξτε ότι η no-arbitrage αξία ενός call option στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων είναι ίση με

$$C = e^{-rT} \cdot \sum_{i=0}^n (S_0 e^{(2i-n)\rho} - K)_+ \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}.$$