

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου - Πιθανοτήτων

Υπενθυμίζουμε συνοπτικά κάποιες βασικές έννοιες που θα μας χρειαστούν σε επόμενα κεφάλαια.

3.1. σ-άλγεβρα: Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μία κλάση υποσυνόλων $\mathfrak{F}$ του Ω καλείται σ-άλγεβρα αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) $\Omega \in \mathfrak{F}$.
- (ii) Αν $A \in \mathfrak{F}$ τότε και $A^c \in \mathfrak{F}$.
- (iii) Αν $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ (αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του Ω) τότε και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$.

Το ζεύγος $(\Omega, \mathfrak{F})$ καλείται *μετρήσιμος χώρος*. Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν $\mathfrak{F}$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\emptyset \in \mathfrak{F}$ και $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$.

Τα στοιχεία της $\mathfrak{F}$ καλούνται *μετρήσιμα σύνολα*. Αν ο Ω είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος, μια σ-άλγεβρα του Ω μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο ενδεχομένων του. Προφανώς θα πρέπει η αριθμήσιμη ένωση και τομή ενδεχομένων να είναι ενδεχόμενο, καθώς και το συμπληρωματικό ενδεχομένου να είναι ενδεχόμενο. Είναι προφανές επίσης ότι, αν ο Ω δεν είναι μονοσύνολο, μπορούμε να ορίσουμε πολλές διαφορετικές σ-άλγεβρες. Η μικρότερη σ-άλγεβρα είναι η $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ και η μεγαλύτερη είναι το δυναμοσύνολο $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$ του Ω (το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του).

Αν $\mathfrak{D}$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι υπάρχει μοναδική ελάχιστη σ-άλγεβρα που την περιέχει. Αυτή συμβολίζεται με $\sigma(\mathfrak{D})$. Αν ο Ω είναι το σύνολο R των πραγματικών και $\mathfrak{T}$ η οικογένεια των ανοιχτών συνόλων του, τότε το σύνολο $\sigma(\mathfrak{T})$ συμβολίζεται με $\mathfrak{B}(R)$ και τα στοιχεία του καλούνται σύνολα *Borel* του R (πρόκειται δηλαδή για την ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά σύνολα, αποδεικνύεται ότι περιέχει και όλα τα κλειστά σύνολα και όλα τα διαστήματα του R^k). Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι $\mathfrak{B}(R) \neq 2^R$ δηλαδή υπάρχουν υποσύνολα του R που δεν είναι σύνολα Borel, δηλαδή δεν μπορούν να «παράχθούν» από τα ανοιχτά σύνολα (ή π.χ. τα διαστήματα) μέσω αριθμήσιμων τομών, ενώσεων και συμπληρωμάτων. Ο ορισμός των Borel συνόλων γενικεύεται με τον προφανή τρόπο και στον ευκλείδειο χώρο R^k (συμβ. με $\mathfrak{B}(R^k)$) και γενικότερα σε κάθε μετρικό χώρο (όπου ορίζονται ανοιχτά σύνολα).

3.2. Μέτρο: Έστω ένα μη κενό σύνολο Ω και $\mathfrak{F}$ μία σ-άλγεβρά του. Μία συνολοσυνάρτηση μ από το $\mathfrak{F}$ στο $[0, \infty]$ καλείται *μέτρο* αν

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ για κάθε ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$.

Η τριάδα $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ καλείται *χώρος μέτρου*.

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο λ το οποίο ορίζεται επάνω στα σύνολα Borel του R και αντιστοιχεί σε κάθε διάστημα του R το μήκος του (δηλ. $\lambda([a, \beta]) = \lambda((a, \beta]) = \lambda([a, \beta)) =$

$\lambda((\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$). Το μέτρο αυτό καλείται *μέτρο Lebesgue*. Περιοριζόμαστε στα σύνολα Borel όσον αφορά το μέτρο Lebesgue διότι αποδεικνύεται ότι το μέτρο αυτό δεν μπορεί να ορισθεί επάνω σε όλα τα υποσύνολα του R . Ο περιορισμός αυτός δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα διότι σύνολα εκτός του $\mathfrak{B}(R)$ σχεδόν ποτέ δεν εμφανίζονται σε εφαρμογές (χοντρικά, μπορούμε να πούμε ότι το $\mathfrak{B}(R)$ περιλαμβάνει όλα τα «γνωστά» σύνολα).

Στο μετρήσιμο χώρο $(Z, 2^Z)$ όπου Z είναι το σύνολο των ακεραίων και 2^Z είναι το δυναμοσύνολο του Z , η συνολοσυνάρτηση $\lambda_0(A) = \text{πλήθος στοιχείων του } A, A \subseteq Z$ είναι ένα μέτρο το οποίο είναι γνωστό ως *αριθμητικό μέτρο*.

Αν ένα μέτρο μ είναι πεπερασμένο, και συγκεκριμένα $\mu(\Omega) = 1$, τότε καλείται *μέτρο πιθανότητας* και συνήθως συμβολίζεται με P . Η τριάδα $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ καλείται *χώρος μέτρου πιθανότητας* ή *χώρος πιθανότητας*.

Θα λέμε ότι μία ιδιότητα ισχύει *μ-σχεδόν παντού* ή *μ-σχεδόν για κάθε ω* αν ισχύει για κάθε στοιχείο $\omega \in \Omega$ εκτός ίσως από ένα μετρήσιμο υποσύνολο A του Ω με $\mu(A) = 0$. Μερικές φορές αντί της έκφρασης «*μ-σχεδόν παντού*» χρησιμοποιείται η έκφραση «*με πιθανότητα 1*».

3.3. Μετρήσιμη συνάρτηση (ή τυχαίο στοιχείο - random element). Μία συνάρτηση ξ από ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$ σε έναν $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ καλείται μετρήσιμη συνάρτηση (ή τυχαίο στοιχείο) αν $\xi^{-1}(B) \in \mathfrak{F}_1$ για κάθε $B \in \mathfrak{F}_2$. Δηλαδή επιστρέφει τα σύνολα του $\mathfrak{F}_2$ σε σύνολα του $\mathfrak{F}_1$. Το σύνολο $\xi^{-1}(B)$ συμβολίζεται και με $[\xi \in B]$ και ουσιαστικά είναι το σύνολο $\{\omega \in \Omega_1: \xi(\omega) \in B\}$.

Αν ο Ω μπορεί να θεωρηθεί ως δειγματικός χώρος που συνδέεται με κάποιο τυχαίο πείραμα, μία μετρήσιμη συνάρτηση ξ από τον $(\Omega, \mathfrak{F})$ στον $(R, \mathfrak{B}(R))$ συνήθως καλείται και **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)** και συνήθως συμβολίζεται με X ή Y κ.ο.κ. (μερικές φορές διατηρούμε την ορολογία «μετρήσιμη συνάρτηση» χωρίς να δημιουργείται σύγχυση). Για να είναι μία συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow R$ τυχαία μεταβλητή αποδεικνύεται ότι αρκεί να ισχύει $[X \leq x] \in \mathfrak{F}$ για κάθε x .

Αν στο χώρο $(\Omega, \mathfrak{F})$ ορίζεται και ένα μέτρο πιθανότητας P , τότε μια τ.μ. X ως συνάρτηση από το Ω στο R «μεταφέρει» την πιθανότητα αυτή και στον R . Σε κάθε $B \in \mathfrak{B}(R)$ «μεταφέρει» την πιθανότητα $P_X(B) = P(X \in B)$ η οποία είναι η $P([X \in B]) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\})$. Το νέο αυτό μέτρο πιθανότητας P_X στον $(R, \mathfrak{B}(R))$ καλείται «επαγόμενο» μέτρο πιθανότητας μέσω της X ή αλλιώς «**κατανομή**» της X . Αποδεικνύεται ότι η κατανομή αυτή περιγράφεται μονοσήμαντα και από την λεγόμενη *συνάρτηση κατανομής*,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P([X \in (-\infty, x]]), \quad x \in R.$$

3.4. Ολοκλήρωμα Lebesgue – Μέση τιμή: Μία μετρήσιμη συνάρτηση $I_A: \Omega \rightarrow R$ (με $A \in \mathfrak{F}$) καλείται *δείκτης* τ.μ. αν $I_A(\omega) = 1$ για $\omega \in A$ και 0 διαφορετικά. Μια μετρήσιμη συνάρτηση ξ από ένα $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ στο $(R, \mathfrak{B}(R))$ καλείται *απλή* αν λαμβάνει πεπερασμένο πλήθος τιμών $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq R$. Αν $A_i = [\xi = x_i] = \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ τότε η απλή ξ μπορεί προφανώς να παρασταθεί ως εξής:

$$\xi = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}.$$

Ως ολοκλήρωμα Lebesgue της ξ (ως προς το μέτρο μ) ορίζεται ο αριθμός

$$\int_{\Omega} \xi d\mu = \int_{\Omega} \xi(\omega) d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mu([\xi = x_i])$$

Αν π.χ. ο αρχικός χώρος Ω είναι και αυτός ο R (δηλ. $\xi: R \rightarrow R$) τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue της ξ ως προς το μ μπορεί διαισθητικά να θεωρηθεί ως το εμβαδόν «κάτω» από την ξ . Μόνο που το εμβαδόν π.χ. ενός ορθογωνίου $(\alpha, \beta) \times (0, x)$ τώρα δεν υπολογίζεται με βάση τον κανόνα: μήκος βάσης $(\beta - \alpha)$ επί ύψος x , αλλά ως: μέτρο βάσης $\mu((\alpha, \beta))$ επί ύψος x .

Αν η ξ είναι μη-αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο R , τότε μπορεί να κατασκευασθεί μία αύξουσα ακολουθία (μη αρνητικών) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο R (δηλ. $0 \leq \xi_1(\omega) \leq \xi_2(\omega) \leq \dots$ για κάθε $\omega \in \Omega$) με $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ (δηλαδή $\xi_n \rightarrow \xi$ κατά σημείο). Μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που έχει αυτή την ιδιότητα είναι η παρακάτω

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(\xi(\omega)).$$

Ως ολοκλήρωμα Lebesgue (ως προς το μέτρο μ) της μη-αρνητικής ξ ορίζεται το όριο

$$\int_{\Omega} \xi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \xi_n d\mu.$$

Το όριο αυτό υπάρχει (διότι πρόκειται για όριο αύξουσας ακολουθίας) και αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της ακολουθίας ξ_n . Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο.

Τέλος, αν ξ είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές σε όλο το R και τα ολοκληρώματα Lebesgue των μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $\xi_+(\omega) = \max\{\xi(\omega), 0\}$ και $\xi_-(\omega) = \max\{-\xi(\omega), 0\}$ είναι πεπερασμένα, τότε ορίζεται το ολοκλήρωμα Lebesgue της $\xi \in R$ (θα λέμε ότι είναι «Lebesgue ολοκληρώσιμη») ως η διαφορά

$$\int_{\Omega} \xi d\mu = \int_{\Omega} \xi_+ d\mu - \int_{\Omega} \xi_- d\mu. \quad (\text{συμβ. και με } \int_{\Omega} \xi(\omega) d\mu(\omega))$$

Αν $A \in \mathfrak{F}$ τότε θα γράφουμε

$$\int_A \xi d\mu = \int_{\Omega} \xi \cdot I_A d\mu.$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue ως ολοκλήρωμα Riemann Αν έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση $f: (R, \mathfrak{B}(R), \lambda) \rightarrow (R, \mathfrak{B}(R))$ (όπου λ το μέτρο Lebesgue) τότε αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue της f (αν υπάρχει) είναι ίσο με το κλασικό ολοκλήρωμα Riemann της συνάρτησης f , δηλαδή,

$$\int_R f d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt,$$

(αρκεί η $|f|$ να είναι Riemann ολοκληρώσιμη). Αυτό διαφαίνεται και από το γεγονός ότι, όπως προείπαμε, το ολοκλήρωμα Lebesgue μπορεί να θεωρηθεί ως το εμβαδόν κάτω από την f με βάση τον κανόνα: εμβαδόν ορθογωνίου = μέτρο βάσης $\lambda((\alpha, \beta))$ επί ύψος. Αλλά εδώ, $\lambda((\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$, και άρα το ολοκλήρωμα Lebesgue ως προς το μέτρο λ εκφράζει το σύνθετο εμβαδόν κάτω από την f (το οποίο ως γνωστό ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann).

Το ολοκλήρωμα Lebesgue ως άθροισμα Αν έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση $f: (Z, 2^Z, \lambda_0) \rightarrow (R, \mathfrak{B}(R))$ (όπου λ_0 το αριθμητικό μέτρο) τότε αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue της f (αν υπάρχει) είναι ίσο με το παρακάτω άθροισμα

$$\int_Z f d\lambda_0 = \sum_{i \in Z} f(i),$$

(αρκεί $\sum |f(i)| < \infty$).

Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής. Αν το μ είναι μέτρο πιθανότητας (συνήθως τότε το συμβολίζουμε με P), το ολοκλήρωμα Lebesgue της X ως προς P (αν ορίζεται) καλείται και **μέση τιμή** της τυχαίας μεταβλητής X και συμβολίζεται με $E(X)$, δηλαδή,

$$E_P(X) = E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται όταν $E(X_+), E(X_-) < \infty$ ή ισοδύναμα όταν $E(|X|) < \infty$.

Ιδιότητες μέσης τιμής: Για την μέση τιμή αποδεικνύονται τα ακόλουθα:

(i) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (a, b πραγματικές σταθερές)

(ii) Αν $X \leq Y$ (σχεδόν για κάθε ω) τότε $E(X) \leq E(Y)$.

(iii) (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης) Αν $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$ είναι μία ακολουθία μη αρνητικών τ.μ. που συγκλίνει (σχεδόν για κάθε ω) στην τ.μ. X τότε

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) \quad (\text{δηλαδή, } E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n))$$

(iv) (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης) Αν $X_1, X_2, \dots$ είναι μία ακολουθία τ.μ. που συγκλίνει στην τ.μ. X και $|X_n| < Y$ (σχεδόν για κάθε ω) για κάποια τ.μ. $Y: E|Y| < \infty$ τότε

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) \quad (\text{δηλαδή, } E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n))$$

3.5. Πυκνότητα ή Radon-Nikodym παράγωγος: Αν υπάρχει μία (μη-αρνητική) μετρήσιμη συνάρτηση ξ τέτοια ώστε δύο μέτρα μ, ν (ενός χώρου $(\Omega, \mathfrak{F})$) συνδέονται με τη σχέση

$$\nu(A) = \int_A \xi d\mu, \quad A \in \mathfrak{F} \quad \left((\Omega, \mathfrak{F}) \xrightarrow[\nu, \mu]{\xi} (R, \mathfrak{B}(R)) \right)$$

τότε η ξ καλείται **πυκνότητα** ή (Radon-Nikodym) **παράγωγος** του ν ως προς το μ και συμβολίζεται και με

$$\xi = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Από το Θεώρημα Radon-Nikodym αποδεικνύεται ότι για κάθε δύο μέτρα ν, μ (στον ίδιο χώρο) υπάρχει μια τέτοια πυκνότητα, ξ , αρκεί το ν να είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ ($\nu \ll \mu$, δηλ. $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ για κάθε $A \in \mathfrak{F}$) και τα μ, ν να είναι σ-πεπερασμένα (ένα μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο αν υπάρχουν $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ με $\mu(A_i) < \infty$, και $\cup A_i = \Omega$).

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Έστω X μία τ.μ. από έναν $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ στον $(R, \mathfrak{B}(R))$ και P_X το (επαγόμενο) μέτρο πιθανότητας του P μέσω της X στον $(R, \mathfrak{B}(R))$. Αν υπάρχει μια f τέτοια ώστε

$$P(X \in A) = P_X(A) = \int_A f d\lambda, \quad A \in \mathfrak{B}(R), \quad \left((\Omega, \mathfrak{F}) \xrightarrow[P]{X} (R, \mathfrak{B}(R)) \xrightarrow[P_X, \lambda]{f} (R, \mathfrak{B}(R)) \right)$$

όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue, τότε από τα παραπάνω, για κάθε $x \in R$, θα είναι

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P_X((-\infty, x]) = \int_{(-\infty, x]} f d\lambda = \int_{\Omega} f I_{(-\infty, x]} d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^x f(t) I_{(-\infty, x]}(t) dt = \int_{-\infty}^x f(t) dt \end{aligned}$$

και η

$$f = \frac{dP_X}{d\lambda} = \frac{dF}{dx},$$

καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X (ή της κατανομής P_X). Σύμφωνα με το Θεώρημα Radon-Nikodym η σ.π.π. f υπάρχει αν $P_X \ll \lambda$, δηλαδή η κατανομή της X είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue (συνήθως τότε η X καλείται απλώς *συνεχής τ.μ.*).

Συνάρτηση πιθανότητας για διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Έστω X μία τ.μ. από έναν $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ στον $(Z, 2^Z)$ και P_X το (επαγόμενο) μέτρο πιθανότητας του P μέσω της X στον $(Z, 2^Z)$. Αν υπάρχει μια f τέτοια ώστε

$$P(X \in A) = P_X(A) = \int_A f d\lambda_0, \quad A \in 2^Z, \quad \left((\Omega, \mathfrak{F}) \xrightarrow[P]{X} (Z, 2^Z) \xrightarrow[P_X, \lambda_0]{f} (R, \mathfrak{B}(R)) \right)$$

όπου λ_0 είναι το αριθμητικό μέτρο τότε, για κάθε $x \in Z$, θα είναι

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P_X(\{x, x-1, \dots\}) = \int_{\{x, x-1, \dots\}} f d\lambda_0 = \int_Z f I_{\{x, x-1, \dots\}} d\lambda_0 \\ &= \sum_{i \in Z} f(i) I_{\{x, x-1, \dots\}} = \sum_{i=-\infty}^x f(i) \end{aligned}$$

και η

$$f = \frac{dP_X}{d\lambda_0} = \Delta F, \quad (\Delta F(x) = F(x) - F(x-1))$$

καλείται συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X (ή της κατανομής P_X). Σύμφωνα με το Θεώρημα Radon-Nikodym η σ.π.π. f υπάρχει αν $P_X \ll \lambda_0$, δηλαδή η κατανομή της X είναι απόλυτα συνεχής ως προς το αριθμητικό μέτρο (συνήθως τότε η X καλείται απλώς *διακριτή τ.μ.*). Τα παραπάνω μπορούν να μεταφραστούν και για κάθε άλλο αριθμήσιμο σύνολο εκτός του Z .

Αλλαγή μέτρου ολοκλήρωσης. Αν δύο μέτρα μ, ν ενός χώρου $(\Omega, \mathfrak{F})$ συνδέονται με τη σχέση

$$\nu(A) = \int_A \xi d\mu, \quad A \in \mathfrak{F}, \quad \xi = \frac{d\nu}{d\mu} \quad \left((\Omega, \mathfrak{F}) \xrightarrow[\mu, \nu]{\xi, \phi} (R, \mathfrak{B}(R)) \right)$$

για κάποια πυκνότητα ξ και ϕ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε

$$\int_{\Omega} \phi d\nu = \int_{\Omega} \phi \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_{\Omega} \phi \cdot \xi d\mu.$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι αν ξ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση από τον χώρο $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mu)$ στον χώρο $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ και ϕ είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση από τον $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ στον $(R, \mathfrak{B}(R))$ τότε

$$\int_{\Omega_1} \phi \circ \xi d\mu = \int_{\Omega_2} \phi d\mu_{\xi} \quad \left((\Omega_1, \mathfrak{F}_1) \xrightarrow[\mu]{\xi} (\Omega_2, \mathfrak{F}_2) \xrightarrow[\mu_{\xi}]{\phi} (R, \mathfrak{B}(R)) \right)$$

(αρκεί να υπάρχει κάποιο από τα δύο ολοκληρώματα) όπου μ_{ξ} είναι το επαγόμενο μέτρο του μ στον Ω_2 μέσω της ξ ($\mu_{\xi}(B) = \mu(\{\xi \in B\})$, $B \in \mathfrak{F}_2$). Εάν το $\mu = P$ είναι μέτρο πιθανότητας και $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2) = (R, \mathfrak{B}(R))$ τότε η παραπάνω γράφεται (χρησιμ. το συμβολισμό X αντί για ξ)

$$E(\phi(X)) = \int_{\Omega_1} \phi \circ X dP = \int_R \phi dP_X, \quad \left((\Omega_1, \mathfrak{F}_1) \xrightarrow[P]{X} (R, \mathfrak{B}(R)) \xrightarrow[P_X]{\phi} (R, \mathfrak{B}(R)) \right)$$

και αν $P_X \ll \lambda$ (X είναι συνεχής τ.μ.) με σ.π.π. $f = \frac{dP_X}{d\lambda}$, τότε

$$E(\phi(X)) = \int_R \phi dP_X = \int_R \phi \frac{dP_X}{d\lambda} d\lambda = \int_R \phi f d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$$

Ενώ αν $P_X \ll \lambda_0$ (X είναι διακριτή τ.μ.) με σ.π. $f = \frac{dP_X}{d\lambda_0}$, τότε

$$E(\phi(X)) = \int_R \phi dP_X = \int_R \phi \frac{dP_X}{d\lambda_0} d\lambda_0 = \int_R \phi f d\lambda_0 = \sum_i \phi(i) f(i).$$

Άρα $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ ή $\sum_i if(i)$ ανάλογα με τον αν X είναι συνεχής ή διακριτή τ.μ.

3.6. Στοχαστική Ανεξαρτησία. Στοχαστική ανεξαρτησία ενδεχομένων. Δύο ενδεχόμενα $A, B \in \mathfrak{F}$ είναι ανεξάρτητα (σε σχέση με το μέτρο πιθανότητας P) όταν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Η (δευμενόμενη) πιθανότητα P ενός ενδεχομένου A δοθείσης της «πληροφορίας» B είναι

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Στοχαστική ανεξαρτησία σ-άλγεβρων. Μια οικογένεια σ-άλγεβρων $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_n$ που περιέχονται σε μία σ-άλγεβρα $\mathfrak{F}$ ενός χώρου $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ καλείται στοχαστικά ανεξάρτητη (ως προς το μέτρο πιθανότητας P) αν

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \text{ για κάθε } A_1 \in \mathfrak{H}_1, A_2 \in \mathfrak{H}_2, \dots, A_n \in \mathfrak{H}_n.$$

Μία άπειρη οικογένεια σ-άλγεβρων καλείται ανεξάρτητη αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Στοχαστική ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών. Συμβολίζουμε με $\sigma(X)$ την σ-άλγεβρα

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathfrak{B}(R)) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}(R)\} = \{[X \in B] : B \in \mathfrak{B}(R)\}$$

η οποία είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στον Ω ως προς την οποία η X είναι μετρήσιμη. Αν $X_i, i \in I$ είναι μία οικογένεια τ.μ. (από ένα χώρο $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ στον $(R, \mathfrak{B}(R))$), συμβολίζουμε με $\sigma(X_i, i \in I)$, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών, την σ-άλγεβρα

$$\sigma(X_i, i \in I) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(X_i)\right)$$

η οποία είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στον Ω ως προς την οποία όλες οι $X_i, i \in I$ είναι μετρήσιμες.

Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X_i, i \in I$ ενός χώρου $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ καλούνται στοχαστικά ανεξάρτητες αν η οικογένεια των σ-αλγεβρών $\sigma(X_i), i \in I$ είναι ανεξάρτητη. Για παράδειγμα, δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες όταν οι $\sigma(X), \sigma(Y)$ είναι ανεξάρτητες, δηλαδή,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \text{ για κάθε } A_1 \in \sigma(X), A_2 \in \sigma(Y)$$

ή ισοδύναμα, $P([X \in B_1] \cap [Y \in B_2]) = P([X \in B_1])P([Y \in B_2])$ για κάθε $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(R)$. Αποδεικνύεται ότι αρκεί να ισχύει για κάθε B_1, B_2 της μορφής $(-\infty, x]$, δηλαδή $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$ για κάθε x, y .

Έστω δύο χώροι μέτρου $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mu), (\Omega_2, \mathfrak{F}_2, \nu)$ και ας θεωρήσουμε και τον χώρο γινόμενο $\Omega_1 \times \Omega_2$ εφοδιασμένο με την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$ η οποία παράγεται από όλα τα μετρήσιμα σύνολα της μορφής $A_1 \times A_2, A_1 \in \mathfrak{F}_1, A_2 \in \mathfrak{F}_2$. Αποδεικνύεται ότι στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2)$ υπάρχει μοναδικό μέτρο, το οποίο συμβολίζουμε με $\mu \times \nu$ και έχει την ιδιότητα

$$\mu \times \nu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1) \cdot \nu(A_2), \quad A_1 \in \mathfrak{F}_1, A_2 \in \mathfrak{F}_2$$

Το μέτρο αυτό καλείται μέτρο γινόμενο των ν, μ . Ο χώρος γινόμενο $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2, \mu \times \nu)$ γενικεύεται και για περισσότερα από δύο $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i, \mu_i)$.

Η συνθήκη (στοχαστικής) ανεξαρτησίας δύο τυχαίων μεταβλητών που περιγράψαμε παραπάνω μπορεί ισοδύναμα να γραφεί και ως εξής:

$$P_{(X,Y)}(B_1 \times B_2) = P_X(B_1)P_Y(B_2) \text{ για κάθε } B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(R),$$

όπου $P_{(X,Y)}$ είναι το επαγόμενο μέτρο πιθανότητας της P στον $(R^2, \mathfrak{B}(R^2))$ μέσω της $(X,Y): \Omega \rightarrow R^2$. Δηλαδή δύο τ.μ. X, Y είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες αν το επαγόμενο μέτρο $P_{(X,Y)}$ είναι ίσο με το μέτρο γινόμενο $P_X \times P_Y$.

Αν X, Y είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες τ.μ. τότε (αρκεί να υπάρχουν οι μέσες τιμές)

$$E(\phi_1(X)\phi_2(Y)) = \int_{R^2} \phi_1\phi_2 dP_{X,Y} = \int_{R^2} \phi_1\phi_2 d(P_X \times P_Y) \stackrel{(*)}{=} \int_R \int_R \phi_1\phi_2 dP_X dP_Y = E(\phi_1(X))E(\phi_2(Y))$$

όπου για την ισότητα (*) χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα Fubini (εννοείται ότι οι ϕ_1, ϕ_2 είναι μετρήσιμες συναρτήσεις από τον R στον R). Τα παραπάνω γενικεύονται και για περισσότερες των δύο τ.μ.

3.7. Δεσμευμένη μέση τιμή

Ο πιο γνωστός (και απλός) ορισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής $E(X | Y)$ που εκφράζει την αναμενόμενη τιμή της X όταν είναι γνωστή η τιμή της Y είναι ο ακόλουθος (για συνεχείς τ.μ. X, Y): αν θεωρήσουμε την συνάρτηση του y

$$g(y) = E(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx$$

τότε η *τυχαία μεταβλητή* $g(Y) = E(X|Y)$ καλείται *δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένης της Y* (ως συνήθως, $f_{X,Y}$ είναι η από κοινού σ.π.π. των X,Y). Ανάλογος ορισμός υπάρχει και για διακριτές τ.μ.

Εάν όμως επιθυμούμε να ορίσουμε μια δεσμευμένη μέση τιμή πιο γενικά, π.χ. δεδομένης μιας οικογένειας τυχαίων μεταβλητών $Y_i, i \in I$, χωρίς να υποθέτουμε ότι οι εμπλεκόμενες τυχαίες μεταβλητές είναι συνεχείς ή διακριτές ή γενικότερα δεδομένης κάποιας «πληροφορίας», τότε θα πρέπει να βρούμε κάποιον άλλο πιο γενικό ορισμό. Όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω ουσιαστικά δεσμεύουμε ως προς μια σ-άλγεβρα η οποία θεωρείται ότι εκφράζει την πληροφορία που *θα* διαθέτουμε (με την έννοια ότι *θα* γνωρίζουμε ποια ενδεχόμενα της πραγματοποιήθηκαν και ποια όχι).

Ορισμός 3.7.1. Έστω μια τυχαία μεταβλητή $X: (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (R, \mathfrak{B}(R))$ με $E(|X|) < \infty$. Μία συνάρτηση W από τον Ω στον R καλείται *δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένης μιας σ-άλγεβρας $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}$* και συμβολίζεται με $W = E(X|\mathfrak{D})$ αν ισχύουν τα παρακάτω (i), (ii),

(i) Η $W = E(X|\mathfrak{D})$ είναι μια τυχαία μεταβλητή από τον $(\Omega, \mathfrak{D}, P) \rightarrow (R, \mathfrak{B}(R))$, δηλαδή είναι $\mathfrak{D}$ -μετρήσιμη (όλα τα σύνολα της μορφής $[W \in B]$ ανήκουν στην $\mathfrak{D}$). Επίσης είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

(ii) Η τ.μ. $W = E(X|\mathfrak{D})$ ικανοποιεί την σχέση

$$\int_G E(X|\mathfrak{D}) dP = \int_G X dP, \quad \text{για κάθε } G \in \mathfrak{D}.$$

Η παραπάνω γράφεται ισοδύναμα χρησιμοποιώντας μέσες τιμές:

$$E(E(X|\mathfrak{D}) \cdot I_G) = E(X \cdot I_G) \quad \text{για κάθε } G \in \mathfrak{D},$$

όπου $I_G = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν πραγματοποιηθεί το G ή όχι (δηλ. $I_G(\omega) = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν $\omega \in G$ ή όχι).

Μερικές φορές θα γράφουμε $E(X|Y_i, i \in I)$ εννοώντας την $E(X|\sigma(Y_i, i \in I))$ δηλαδή την δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένης της σ-άλγεβρας που παράγεται από τις $Y_i, i \in I$.

Υπαρξη και μοναδικότητα: Αν η X είναι μη-αρνητική, ορίζουμε το μέτρο ν στον $(\Omega, \mathfrak{D})$ έτσι ώστε

$$\nu(G) = \int_G X dP, \quad G \in \mathfrak{D}.$$

Αυτό το μέτρο είναι πεπερασμένο διότι $\nu(\Omega) = E(X) < \infty$. Αν περιοριστούμε στον χώρο $(\Omega, \mathfrak{D})$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα μέτρα P, ν , ορίζονται στον ίδιο χώρο $(\Omega, \mathfrak{D})$ και μάλιστα το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το P ($\nu \ll P$ διότι $P(G) = 0 \Rightarrow \nu(G) = 0$ για κάθε $G \in \mathfrak{D}$). Επομένως από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει μία «πυκνότητα» $f, \mathfrak{D}$ -μετρήσιμη, η οποία ικανοποιεί την

$$\nu(G) = \int_G f dP, \quad G \in \mathfrak{D}$$

και είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η παραπάνω R-N πυκνότητα f ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) της δεσμευμένης μέσης τιμής, δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε $E(X|\mathfrak{D}) = f$. Αν η X δεν είναι μη αρνητική τότε μπορούμε να ορίσουμε $E(X|\mathfrak{D}) = E(X_+|\mathfrak{D}) - E(X_-|\mathfrak{D})$.

Άρα η $E(X | \mathcal{D})$ υπάρχει πάντοτε και είναι μοναδική σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$ (αν υπάρχουν δύο τ.μ. που ικανοποιούν τις (i), (ii) παραπάνω τότε θα είναι ίσες με πιθανότητα 1).

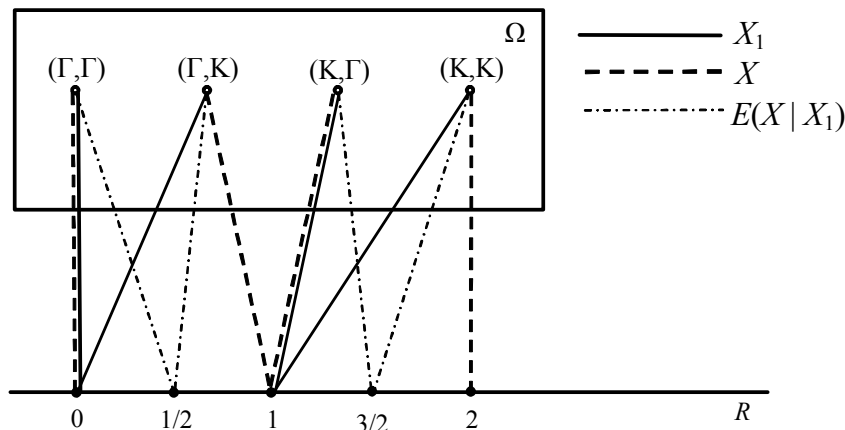
Αποδεικνύεται ότι όταν οι X, Y είναι συνεχείς τ.μ., η δεσμευμένη μέση τιμή $E(X | \sigma(Y))$ είναι ίση με την $g(Y)$ όπου $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx$. Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για διακριτές τ.μ. (στη θέση του ολοκληρώματος έχουμε άθροισμα).

Παράδειγμα 3.7.1. Έστω ότι ένα νόμισμα ρίπτεται δύο φορές (μία στο χρόνο 1 και μία στο χρόνο 2) με $X_1 \in \{0, 1\}$ ($\Gamma=0, K=1$) το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης και $X_2 \in \{0, 1\}$ το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης. Έστω επίσης X το πλήθος από K στις δύο ρίψεις. Ως δειγματικός χώρος εδώ μπορεί να θεωρηθεί ο $\Omega = \{(K, K), (K, \Gamma), (\Gamma, K), (\Gamma, \Gamma)\}$ με αντίστοιχη σ-άλγεβρα την $\mathfrak{F} = 2^\Omega$ (όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω , $2^4 = 16$ το πλήθος). Επίσης σε κάθε ενδεχόμενο αντιστοιχίζεται μία πιθανότητα P ως εξής: θεωρούμε ότι για τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $P((K, K)) = P((K, \Gamma)) = P((\Gamma, K)) = P((\Gamma, \Gamma)) = 1/4$ από όπου προκύπτει η πιθανότητα οποιουδήποτε άλλου ενδεχομένου. Το επαγόμενο μέτρο P_X της P στον R μέσω της τ.μ. X (δηλαδή η κατανομή της τ.μ. X) θα είναι

$$\begin{aligned} P_X(\{0\}) &= P(X=0) = P(\{(\Gamma, \Gamma)\}) = 1/4, \\ P_X(\{1\}) &= P(X=1) = P(\{(\Gamma, K), (K, \Gamma)\}) = 1/2, \\ P_X(\{2\}) &= P(X=2) = P(\{(K, K)\}) = 1/4, \end{aligned}$$

(γενικά $P_X(A) = \frac{1}{4}I_A(0) + \frac{1}{2}I_A(1) + \frac{1}{4}I_A(2)$, $A \in \mathfrak{B}(R)$ όπου $I_A(x) = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν $x \in A$ ή όχι). Η μέση τιμή της τ.μ. X (χωρίς να έχουμε καμία πληροφορία) είναι η

$$E(X) = 0 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{4} = 1.$$



Η $\sigma(X_1)$ εδώ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ενδεχόμενα $[X_1 = 0] = \{(\Gamma, \Gamma), (\Gamma, K)\}$ και $[X_1 = 1] = \{(K, \Gamma), (K, K)\}$, δηλαδή η

$$\sigma(X_1) = \{\emptyset, \{(\Gamma, \Gamma), (\Gamma, K)\}, \{(K, \Gamma), (K, K)\}, \Omega\}.$$

Όταν θα πάμε στο χρόνο 1 θα γνωρίζουμε το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης X_1 και τότε

$$E(X | X_1 = 0) = \sum_{i=0}^2 xP(X = x | X_1 = 0) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2},$$

$$E(X | X_1 = 1) = \sum_{i=0}^2 xP(X = x | X_1 = 1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

και επομένως η $E(X | \sigma(X_1)) = E(X | X_1)$, είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία λαμβάνει τις τιμές $1/2$ και $3/2$ με πιθανότητες

$$P(E(X | X_1) = 1/2) = P(X_1 = 0) = 1/2 \quad \text{και} \quad P(E(X | X_1) = 3/2) = P(X_1 = 1) = 1/2.$$

Η δεσμευμένη μέση τιμή $E(X | X_1)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει την αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X δεδομένου του αποτελέσματος που θα έχει η πρώτη ρίψη ή την αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X όταν θα είμαστε στο χρόνο 1. Μετά το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης (δηλαδή στο χρόνο 1) θα γνωρίζουμε ποια από τα ενδεχόμενα της $\sigma(X_1)$ έχουν πραγματοποιηθεί.

Γενικότερα, η δεσμευμένη μέση τιμή $E(X | \mathcal{D})$ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει την αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X δεδομένης της «πληροφορίας» που θα λάβουμε από την πραγματοποίηση ενός πειράματος με σύνολο ενδεχομένων $\mathcal{D}$. Η πληροφορία που θα λάβουμε είναι ποια από τα ενδεχόμενα της $\mathcal{D}$ πραγματοποιήθηκαν και ποια όχι.

3.8. Ιδιότητες Δεσμευμένης Μέσης Τιμής

(i) $E(X | \{\emptyset, \Omega\}) = E(X)$, $E(X | \mathfrak{F}) = X$, και $E(X | \sigma(X)) = X$. Η σ -άλγεβρα $\{\emptyset, \Omega\}$ δεν μας παρέχει καμία πληροφορία (το Ω θα πραγματοποιηθεί σίγουρα ενώ το $\emptyset$ όχι). Αντίθετα αν γνωρίζουμε ποια από τα ενδεχόμενα της $\mathfrak{F}$ (ή της $\sigma(X)$) πραγματοποιήθηκαν, ουσιαστικά γνωρίζουμε και την τιμή που θα πάρει η X και επομένως η αναμενόμενη τιμή της θα είναι η ίδια η X .

(ii) $E(X | \mathcal{D}) = a$ αν $X = a$ (σταθερά) με πιθανότητα 1.

(iii) $E(aX + bY | \mathcal{D}) = aE(X | \mathcal{D}) + bE(Y | \mathcal{D})$ για σταθερές a, b .

(iv) $E(X | \mathcal{D}) \leq E(Y | \mathcal{D})$ για σταθερές $X \leq Y$ με πιθανότητα 1.

(v) Αν η X είναι $\mathcal{D}$ -μετρήσιμη, τότε $E(XY | \mathcal{D}) = XE(Y | \mathcal{D})$ με πιθανότητα 1 ($E(|XY|), E(|Y|) < \infty$).

(vi) Αν $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$, τότε $E(E(X | \mathcal{D}_2) | \mathcal{D}_1) = E(E(X | \mathcal{D}_1) | \mathcal{D}_2) = E(X | \mathcal{D}_1)$ με πιθανότητα 1 ($E(|X|) < \infty$). Δηλαδή αν δεσμεύσουμε ως προς δύο «πληροφορίες», μια «μεγαλύτερη» και μία «μικρότερη» (η «μικρότερη» περιέχεται στην «μεγαλύτερη») τότε είναι σαν να δεσμεύουμε μόνο ως προς την «μικρότερη». Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή και ως *tower property*. Αν πάρουμε $\mathcal{D}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ προκύπτει ότι $E(E(X | \mathcal{D})) = E(X)$.

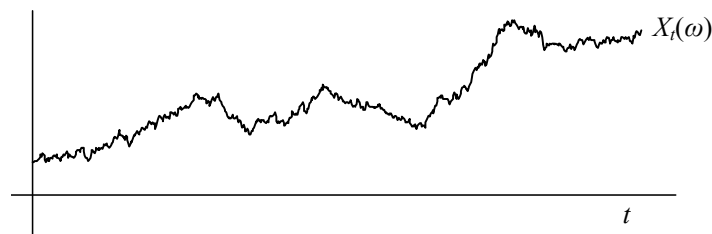
(vii) Αν η σ -άλγεβρα $\mathfrak{H}$ είναι ανεξάρτητη από τις $\sigma(X)$ και $\mathcal{D}$ τότε $E(X | \sigma(\mathcal{D} \cup \mathfrak{H})) = E(X | \mathcal{D})$ με πιθανότητα 1. (π.χ. $E(X | Y, Z) = E(X | Y)$ αν Z ανεξάρτητη των X, Y). Προκύπτει ότι, αν η σ -άλγεβρα $\mathfrak{H}$ είναι ανεξάρτητη από την $\sigma(X)$, τότε $E(X | \mathfrak{H}) = E(X)$.

Αν I_A είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου $A \in \mathfrak{F}$ τότε η $E(I_A | \mathcal{D})$ γράφεται $P(A | \mathcal{D})$ και καλείται *δεσμευμένη πιθανότητα* του A δεδομένης της σ -άλγεβρας $\mathcal{D}$.

3.9. Στοχαστική Ανέλιξη

Στοχαστική ανέλιξη ή διαδικασία καλείται μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X_t, t \in I$ με $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (R, \mathcal{B}(R))$, για κάποιο σύνολο δεικτών I . Αν το $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ τότε καλείται διακριτού χρόνου ενώ αν $I = [0, \infty)$ τότε καλείται συνεχούς χρόνου (το I μπορεί να είναι και πιο σύνθετο σύνολο). Συνήθως η X_t εκφράζει την κατάσταση ενός συστήματος στο χρόνο t (Π.χ. τιμή μιας μετοχής στο χρόνο t ή αξία ενός χαρτοφυλακίου στο χρόνο t).

Η X_t μπορεί να θεωρηθεί ως μία απεικόνιση από το σύνολο $\Omega \times I$ στο R (απεικονίζει κάθε στοιχείο $(\omega, t) \in \Omega \times I$ στο $X_t(\omega) \in R$) ή μία απεικόνιση από το σύνολο Ω στο σύνολο των συναρτήσεων από το I στον R (απεικονίζει κάθε στοιχείο $\omega \in \Omega$ στην συνάρτηση $\zeta_\omega : I \rightarrow R$ όπου $\zeta_\omega(t) = X_t(\omega)$). Υπό την δεύτερη έννοια, μια στοχαστική ανέλιξη μπορεί να θεωρηθεί και ως μία τυχαία συνάρτηση. Αν τελικά πραγματοποιηθεί το $\omega \in \Omega$ τότε η συνάρτηση $\zeta_\omega(t) = X_t(\omega) : I \rightarrow R$ καλείται *πραγματοποίηση* ή *διαδρομή* (path) της $X_t, t \in I$. Αν π.χ. X_t είναι η τιμή μιας μετοχής στο χρόνο t τότε μια διαδρομή της συνήθως παριστάνεται από ένα γράφημα που στον οριζόντιο άξονα έχει τον χρόνο t και στο κάθετο την τιμή $X_t(\omega)$.



Μία στοχαστική ανέλιξη $X_t, t \in I$ θα λέγεται ότι έχει την *Μαρκοβιανή ιδιότητα* αν το I είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο (π.χ. Z, R) και

$$P(X_u \in B \mid \sigma(X_t, t \leq t_0)) = P(X_u \in B \mid \sigma(X_{t_0})), \text{ για κάθε } u > t_0 \text{ και } B \text{ (με } \pi_{\theta} = 1).$$

Δηλαδή η δεσμευμένη κατανομή της X_u ($u > t_0$) δεδομένης της πληροφορίας που βασίζεται στο «παρόν» (t_0) και στο «παραλθόν» ($t < t_0$) είναι ίση με την δεσμευμένη κατανομή της X_u δεδομένης της πληροφορίας που βασίζεται μόνο στο «παρόν» (t_0) (η μελλοντική τιμή της ανέλιξης επηρεάζεται μόνο από την παρούσα της τιμή και όχι από τις παρελθούσες της τιμές).

3.10. Martingales

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Μια ακολουθία σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ με την ιδιότητα $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ καλείται *μελλοντική ιστορία* ή *φιλτράρισμα* (filtration). Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots$ θα λέγεται *προσαρμοσμένη* (adapted) σε ένα φιλτράρισμα $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ αν η X_i είναι $\mathcal{F}_i$ -μετρήσιμη (δηλαδή $\sigma(X_i) \subseteq \mathcal{F}_i$).

Συνήθως η $\mathcal{F}_i$ θεωρείται ότι εκφράζει την πληροφορία που θα έχουμε σε κάποιο χρόνο t_i στο μέλλον με $t_1 < t_2 < \dots$ και επομένως $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$, διότι αν κάποιο ενδεχόμενο ανήκει στην $\mathcal{F}_{i-1}$ θα ανήκει και στην $\mathcal{F}_i$ (αν γνωρίζουμε ότι ένα A έχει πραγματοποιηθεί ή όχι στο χρόνο $i-1$ θα το γνωρίζουμε και στο χρόνο i). Διαισθητικά, η X_i είναι $\mathcal{F}_i$ -μετρήσιμη αν η τιμή της X_i είναι γνωστή δεδομένης της πληροφορίας $\mathcal{F}_i$, δηλαδή αν η τιμή της είναι γνωστή στο χρόνο t_i . Αυτό συμβαίνει διότι η πληροφορία $\mathcal{F}_i$ που θα έχουμε είναι ποια από τα ενδεχόμενα της $\mathcal{F}_i$ πραγματοποιήθηκαν και ποια όχι. Επειδή τα ενδεχόμενα $[X_i \in B], B \in \mathcal{B}(R)$ ανήκουν στην $\mathcal{F}_i$

($\sigma(X_i) \subseteq \mathcal{F}_i$), θα γνωρίζουμε και ποια από αυτά πραγματοποιήθηκαν, δηλαδή θα γνωρίζουμε επακριβώς την τιμή της X_i .

Παράδειγμα 3.10.1. Έστω $X_0, X_1, X_2, \dots$ η τιμή ενός αγαθού στους χρόνους $0, 1, 2, \dots$ (σήμερα είμαστε στο χρόνο 0) και Ω είναι ο χώρος των δυνατών καταστάσεων που μπορεί να βρεθεί η αγορά από σήμερα μέχρι ένα χρονικό σημείο στο μέλλον. Κάθε $\omega \in \Omega$ μπορεί να καθορίζει διαφορετική ιστορία από σήμερα και μετά. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ όλα τα δυνατά ενδεχόμενα του Ω . Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο χρόνο n θα είναι γνωστό για κάποια ενδεχόμενα του $\mathcal{F}$ αν έχουν συμβεί ή όχι, και έστω $\mathcal{F}_n$ η σ-άλγεβρα αυτών των ενδεχομένων. Η $\mathcal{F}_n$ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει όλη την πληροφορία σχετική με την κατάσταση που θα επικρατεί στην αγορά μέχρι και το χρόνο n . Είναι προφανές ότι $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$. Η τιμή του αγαθού X_n προφανώς είναι $\mathcal{F}_n$ -μετρήσιμη διότι στο χρόνο n θα είναι γνωστή η τιμή X_n . Επομένως η ακολουθία των τιμών $X_1, X_2, \dots$ είναι *προσαρμοσμένη* στην μελλοντική ιστορία (ή φιλτράρισμα) $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$

Η αναμενόμενη τιμή του αγαθού στο χρόνο $n + 1$ όταν θα βρισκόμαστε στο χρόνο n , είναι ίση με $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$. Σε πολλές περιπτώσεις, αυτή η αναμενόμενη τιμή είναι ίση με την τιμή X_n του αγαθού στον χρόνο n (η X_n θα είναι γνωστή στο χρόνο n). Αν π.χ. η ακολουθία $X_1, X_2, \dots$ γενικότερα εκφράζει το κέρδος από την συμμετοχή μας σε ένα τυχερό παιχνίδι (π.χ. μια επενδυτική στρατηγική) τότε η $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ είναι το αναμενόμενο κέρδος που θα έχουμε στο χρόνο $n+1$ όταν θα βρισκόμαστε στο χρόνο n («υπολογισμένο» στο χρόνο n). Αν το $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ είναι ίσο με X_n (το κέρδος μας μέχρι το χρόνο n) τότε λέγεται ότι συμμετέχουμε σε ένα «δίκαιο» τυχερό παιχνίδι με την έννοια ότι το αναμενόμενο κέρδος που θα έχουμε από τον χρόνο n στο χρόνο $n+1$, «υπολογισμένο» στο χρόνο n , θα είναι

$$E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) - E(X_n | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) - X_n = 0.$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η παραπάνω ιδιότητα μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών ως προς κάποια ιστορία είναι πολύ σημαντική και για αυτό δίνεται ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 3.10.1. Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots$ (από τον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ στον $(R, \mathcal{B}(R))$) θα καλείται ***martingale*** ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ αν είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα αυτό, $E(|X_i|) < \infty, i = 1, 2, \dots$ και

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

με πιθανότητα 1 (Αν η παραπάνω ισότητα είναι ανισότητα $\geq$ τότε η ακολουθία καλείται *sub-martingale* ενώ αν είναι $\leq$ τότε καλείται *supermartingale*).

Μερικές φορές θα λέμε ότι μία ακολουθία είναι *P-martingale* προσδιορίζοντας και το μέτρο ως προς το οποίο είναι *martingale*.

Παρατήρηση 3.10.1. Αν $X_1, X_2, \dots$ είναι *martingale* ως προς κάποιο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ τότε είναι και *martingale* ως προς το φιλτράρισμα

$$\mathcal{D}_1 = \sigma(X_1), \mathcal{D}_2 = \sigma(X_1, X_2), \mathcal{D}_3 = \sigma(X_1, X_2, X_3) \dots$$

Πράγματι η παραπάνω ακολουθία σ-αλγεβρών είναι φιλτράρισμα ($\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$), η $X_1, X_2, \dots$ είναι προσαρμοσμένη σε αυτό (X_i είναι προφανώς $\mathcal{D}_i = \sigma(X_1, \dots, X_i)$ - μετρήσιμη) και

$$E(X_{n+1} | \mathcal{D}_n) = E(E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) | \mathcal{D}_n) = E(X_n | \mathcal{D}_n) = X_n.$$

Το συγκεκριμένο φιλτράρισμα είναι το μικρότερο ως προς το οποίο η $X_1, X_2, \dots$ είναι *martingale*. Σε αυτή την περίπτωση συνήθως γράφουμε απλά ότι

$$E(X_{n+1} | X_1, X_2, \dots, X_n) = X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Στο εξής όταν θα λέμε ότι μία ακολουθία $X_1, X_2, \dots$ είναι ένα martingale χωρίς να αναφέρουμε το φιλτράρισμα θα εννοούμε ότι είναι τουλάχιστον ως προς το «φυσικό» της φιλτράρισμα $\mathcal{D}_1 = \sigma(X_1)$, $\mathcal{D}_2 = \sigma(X_1, X_2)$, $\dots$.

Παρατήρηση 3.10.2. Λαμβάνοντας τις μέσες τιμές στην σχέση $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ συνάγεται ότι για μια martingale ακολουθία $X_1, X_2, \dots$ ισχύει, $E(E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)) = E(X_n)$ και επομένως,

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) = \dots = E(X_0),$$

δηλαδή όλες οι τ.μ $X_1, X_2, \dots$ μιας ακολουθίας martingale έχουν την ίδια μέση τιμή. Επίσης, $E(X_{n+2} | \mathcal{F}_n) = E(E(X_{n+2} | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ και άρα $E(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) = X_n$, $k = 1, 2, \dots$.

Παράδειγμα 3.10.2. Αν $Y_1, Y_2, \dots$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. (ορισμένες στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) με $E(Y_i) = 0$ τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$X_1 = Y_1, \quad X_2 = Y_1 + Y_2, \quad X_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3, \quad \dots$$

είναι martingale (υποθ. ότι $E(|X_i|) < \infty$). Πράγματι, ας θεωρήσουμε το φυσικό φιλτράρισμα $\mathcal{D}_1 = \sigma(X_1)$, $\mathcal{D}_2 = \sigma(X_1, X_2)$, $\dots$. Προφανώς κάθε X_i είναι $\mathcal{D}_i = \sigma(X_1, \dots, X_i)$ – μετρήσιμη (πρόκειται για την ελάχιστη σ-άλγεβρα ως προς την οποία οι $X_1, \dots, X_i$ είναι μετρήσιμες) και επίσης, για $n = 1, 2, \dots$, είναι

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | X_1, X_2, \dots, X_n) &= E(X_n + Y_{n+1} | X_1, X_2, \dots, X_n), \\ &= E(X_n | X_1, X_2, \dots, X_n) + E(Y_{n+1} | X_1, X_2, \dots, X_n) = X_n + E(Y_{n+1}) = X_n. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.10.3. Αν Z είναι μία τ.μ. με $E(|Z|) < \infty$ και $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ ένα φιλτράρισμα τότε η ακολουθία

$$X_n = E(Z | \mathcal{F}_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

είναι martingale ως προς $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$. Πράγματι, η X_n είναι $\mathcal{F}_n$ – μετρήσιμη (από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής) και

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(E(Z | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = E(Z | \mathcal{F}_n) = X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Αν π.χ. Z είναι η τιμή ενός αγαθού στο χρόνο t και $E(Z | \mathcal{F}_n)$ θα είναι η αναμενόμενη τιμή του αγαθού όταν βρισκόμαστε στο χρόνο $t_n < t$ (κατά τον οποίο θα έχουμε την «πληροφορία» $\mathcal{F}_n$), τότε αυτή η ακολουθία των αναμενόμενων τιμών είναι martingale.

Ιδιαίτερα, η ακολουθία $X_n = E(Z | Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, $n = 1, 2, \dots$ είναι martingale για οποιαδήποτε οικογένεια τ.μ. $Y_1, Y_2, \dots$ (αρκεί να υπάρχουν οι μέσες τιμές).

Παράδειγμα 3.10.4. Έστω ότι ένας επενδυτής έχει ένα αρχικό χρηματικό ποσό X_0 στο χρόνο 0 από το οποίο και επενδύει ποσό W_0 σε μια επένδυση που αποφέρει τυχαίο κέρδος Δ για κάθε χρηματική μονάδα επένδυσης. Το Δ μπορεί να είναι θετικό (κέρδος) ή αρνητικό (ζημία) (αν π.χ. $\Delta = 0$ τότε ο επενδυτής δεν έχει ούτε κέρδος ούτε ζημία). Στο χρόνο 1, ο επενδυτής θα έχει ποσό

$$X_1 = X_0 + W_0 \Delta_1.$$

Από αυτό θα αποφασίζει (με βάση το X_1) ότι θα επενδύσει ποσό W_1 και ομοίως στο χρόνο 2 θα έχει ποσό

$$X_2 = X_1 + W_1 \Delta_2$$

κ.ο.κ. Αν συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_n$ την πληροφορία που έχουμε στο χρόνο n για την κατάσταση της αγοράς τότε προφανώς η W_n είναι $\mathcal{F}_n$ -μετρήσιμη (αφού ο επενδυτής θα αποφασίσει το ποσό W_n που θα επενδύσει στο χρόνο n γνωρίζοντας την πληροφορία $\mathcal{F}_n$ και όχι μελλοντική πληροφορία). Επίσης, η Δ_n είναι $\mathcal{F}_n$ -μετρήσιμη αφού στο χρόνο n θα γνωρίζουμε το κέρδος από την επένδυση μιας χρηματικής μονάδας. Υποθέτουμε επίσης ότι στο χρόνο n ο επενδυτής βλέπει την συγκεκριμένη επένδυση ως ένα «δίκαιο τυχερό παιχνίδι», ότι δηλαδή αποφέρει μέσο κέρδος σε κάθε βήμα $E(\Delta_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$. Η ακολουθία των τιμών $X_1, X_2, \dots$ είναι προσαρμοσμένη στην ιστορία $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ (η τιμή της X_n είναι γνωστή στο χρόνο n) και επίσης

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(X_n + W_n \Delta_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n + W_n E(\Delta_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

(υποθ. ότι $0 \leq W_n \leq a$, για κάποιο $a \in \mathbb{R}$). Άρα το συνολικό κέρδος του επενδυτή $X_1, X_2, \dots$ στους χρόνους $1, 2, \dots$ αντίστοιχα, είναι martingale, οποιαδήποτε επενδυτική στρατηγική $W_0, W_1, \dots$ και αν ακολουθήσει (αρκεί όπως είδαμε να συμμετέχει σε ένα «δίκαιο τυχερό παιχνίδι»).

Ορισμός 3.10.2. Χρόνος διακοπής (stopping time). Έστω ένας χώρος $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και μία ιστορία $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$. Μία τυχαία μεταβλητή $\tau: \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ καλείται χρόνος διακοπής αν

$$[\tau = n] \in \mathcal{F}_n.$$

Αποδεικνύεται ότι αν $X_1, X_2, \dots$ είναι martingale ως προς την ιστορία $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ τότε $E(X_\tau) = E(X_0)$ (αρκεί $E(\tau) < \infty$ και $E(|X_{n+1} - X_n| | \mathcal{F}_n) \leq M$ για κάποιο $M > 0$).

Παράδειγμα 3.10.5. Στο Παράδειγμα 3.10.4, ο επενδυτής αποφασίζει να διακόψει την επενδυτική του στρατηγική στο χρόνο 1 ή στο χρόνο 2 ή στο χρόνο 3, κ.ο.κ. ... ανάλογα με την πληροφορία που θα γνωρίζει μέχρι εκείνη την στιγμή. Αν τ είναι ο χρόνος στον οποίο διακόπτει ο επενδυτής την επενδυτική του στρατηγική τότε προφανώς θα είναι $[\tau = n] \in \mathcal{F}_n$ διότι ο επενδυτής γνωρίζει αν θα σταματήσει ή όχι στο χρόνο n (δηλ. $\tau = n$) μόνο όταν φτάσει στο χρόνο n (δηλαδή γνωρίζει την πληροφορία $\mathcal{F}_n$). Άρα αυτός ο χρόνος τ είναι ένας χρόνος διακοπής.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 3 (Martingales)

Άσκηση 1. Έστω μία ακολουθία ανεξάρτητων και θετικών τ.μ. $Y_1, Y_2, \dots$ με $E(Y_i) = 1$. Δείξτε ότι η ανέλιξη $X_n = Y_1 Y_2 \dots Y_n, n = 1, 2, \dots$ είναι martingale.

Άσκηση 2. Έστω ότι η στοχαστική ανέλιξη $X_n, n = 0, 1, 2, \dots$ είναι martingale ως προς κάποιο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots$.

(a) Δείξτε ότι για τις προσαυξήσεις $Y_n = X_n - X_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ της παραπάνω στοχαστικής ανέλιξης ισχύει ότι $E(Y_{n+k} X_n | \mathcal{F}_n) = 0$ και $E(Y_{n+k} X_n) = 0$ για $n = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots$

(b) Δείξτε ότι οι προσαυξήσεις $Y_n, n = 1, 2, \dots$ είναι ασυσχέτιστες τ.μ. Είναι πάντοτε και ανεξάρτητες; (δώστε αντιπαράδειγμα).

Άσκηση 3. Έστω $Y_1, Y_2, \dots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων δίτιμων τ.μ. με $P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = -1) = 1/2, i = 1, 2, \dots$. Θεωρούμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$X_0 = 0, X_1 = Y_1, X_2 = Y_1 + Y_2, X_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3, \dots$$

Η στοχαστική ανέλιξη $X_n, n = 0, 1, \dots$ καλείται *συμμετρικός τυχαίος περίπατος* (διότι σε κάθε βήμα κινείται τυχαία πάνω ή κάτω κατά μία μονάδα). Από το Παράδειγμα 3.10.2. προκύπτει άμεσα ότι η $X_n, n = 0, 1, \dots$ είναι martingale ως προς το φυσικό φιλτράρισμα της $\mathcal{D}_1 = \sigma(X_0), \mathcal{D}_2 = \sigma(X_0, X_1), \dots$ (διότι οι προσανξήσεις $Y_1, Y_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $E(Y_i) = 0$).

Έστω τώρα $e^{\sigma X_n}, n = 0, 1, \dots$ ο αντίστοιχος εκθετικός ή γεωμετρικός συμμετρικός τυχαίος περίπατος (π.χ. εκφράζει την τιμή ενός αγαθού στους χρόνους $n = 0, 1, \dots$). Να βρείτε τη σταθερά c για την οποία η νέα στοχαστική διαδικασία $S_n = c^n e^{\sigma X_n}, n = 0, 1, \dots$ (“discounted” γεωμετρικός συμμετρικός τυχαίος περίπατος) είναι martingale.

Άσκηση 4. Έστω $X_n, n = 0, 1, \dots$ ο συμμετρικός τυχαίος περίπατος (βλ. Άσκηση 3). Να αποδείξετε ότι η στοχαστική διαδικασία $D_n = X_n^2 - cn, n = 0, 1, \dots$ είναι και αυτή martingale (προσδιορίστε τη σταθερά c).

Άσκηση 5. Να απαντήσετε και πάλι στα ερωτήματα των Ασκήσεων 3 και 4, αυτή τη φορά θεωρώντας ότι οι τυχαίες και ανεξάρτητες προσανξήσεις $Y_1, Y_2, \dots$ ακολουθούν κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$.

Άσκηση 6. Έστω μία στοχαστική ανέλιξη $S_0, S_1, \dots$, και έστω $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ μία άλλη στοχαστική ανέλιξη προσαρμοσμένη στο φυσικό φιλτράρισμα της $S_0, S_1, \dots$. Μπορείτε να δώσετε μια διαισθητική ερμηνεία για τη σχέση μεταξύ των δύο ανεξίξεων;

Άσκηση 7. Θεωρούμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $S_0, S_1, \dots$ εκφράζει την αξία μιας μετοχής A στους χρόνους $0, 1, \dots$. Έστω επίσης ότι στο χρόνο 0 (σήμερα) αγοράζουμε Δ_0 μετοχές, στο χρόνο 1 αγοράζουμε $\Delta_1 - \Delta_0$ μετοχές (υπονοείται ότι αν $\Delta_1 - \Delta_0 < 0$ τότε πωλούμε) ώστε να κατέχουμε Δ_1 μετοχές. Όμοια, στο χρόνο 2 αγοράζουμε $\Delta_2 - \Delta_1$ μετοχές ώστε τώρα να κατέχουμε Δ_2 μετοχές, κ.ο.κ. Οι αγοραπωλησίες αυτές γίνονται με βάση τη γνώση των προηγούμενων τιμών της μετοχής (και φυσικά όχι τη γνώση μελλοντικών τιμών). Δηλαδή στο χρόνο i θα αγοράσουμε $\Delta_i - \Delta_{i-1}$ μετοχές με βάση την πληροφορία που θα έχουμε μέχρι και το χρόνο αυτό (η πληροφορία θα είναι οι τιμές $S_1, S_2, \dots, S_i$).

(i) Γιατί, σύμφωνα με τα παραπάνω, η στοχαστική διαδικασία $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ θα πρέπει να θεωρηθεί ότι είναι προσαρμοσμένη στο φυσικό φιλτράρισμα της $S_0, S_1, \dots$;

(ii) Να δείξετε ότι το κέρδος που θα έχουμε από την παραπάνω επενδυτική στρατηγική στο χρόνο $n \leq N$ (για κάποιο δεδομένο N) θα είναι

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta_{i-1} (S_i - S_{i-1}), n = 1, 2, \dots, N.$$

(iii) Δείξτε ότι αν η $S_1, S_2, \dots, S_N$ είναι martingale τότε και η $V_1, V_2, \dots, V_N$ είναι martingale.

(iv) Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα, επιχειρηματολογήστε σχετικά με το αν μπορεί να βρεθεί μία επενδυτική στρατηγική (επί ενός τίτλου με αξία που είναι martingale) που κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον θα έχει γνήσια θετικό αναμενόμενο κέρδος.