

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εισαγωγή στην Τιμολόγηση Παραγώγων – Διωνυμικό Μοντέλο μιας Περιόδου

2.1. Χρονική Αξία Χρήματος - Επιτόκια

Αν ένα άτομο ή εταιρία A κατέχει ένα χρηματικό ποσό P και δεν σκοπεύει να το χρησιμοποιήσει άμεσα, τότε μπορεί να το δανείσει για ένα χρονικό διάστημα σε ένα άλλο άτομο ή εταιρία B που μπορεί να το αξιοποιήσει κατάλληλα (π.χ. κάλυψη οφειλών, επένδυση κ.α.). Για την «διευκόλυνση» αυτή το άτομο B θα πρέπει, μαζί με την επιστροφή του ποσού P στο A , να καταβάλλει και κάποιο πρόσθετο ποσό, τον λεγόμενο τόκο. Αν π.χ. κάποιος δανεισθεί για ένα έτος ένα χρηματικό ποσό P με απλό (ετήσιο) επιτόκιο r τότε μετά από ένα έτος θα πρέπει να επιστρέψει το αρχικό ποσό συν τον τόκο, δηλαδή, θα πρέπει να επιστρέψει ποσό,

$$P + Pr = P(1 + r).$$

Στην αγορά υπάρχουν πολλά διαφορετικά επιτόκια, π.χ. επιτόκια τραπεζικών καταθέσεων, διατραπεζικά επιτόκια (LIBOR: London Interbank Offered Rate ή EURIBOR: European Interbank Offered Rate κ.α.), επιτόκια ομολόγων, κ.α. Γενικά, όσο μεγαλύτερος είναι ο πιστωτικός κίνδυνος (και όσο μικρότερη η ευελιξία του «δανείου»), τόσο μεγαλύτερο είναι και το επιτόκιο. Για παράδειγμα, τα ομόλογα εταιριών έχουν το μεγαλύτερο επιτόκιο αλλά και το μεγαλύτερο κίνδυνο (διότι π.χ. η εταιρία που εξέδωσε το ομόλογο μπορεί να πτωχεύσει).

2.1.1. Ανατοκισμός σε k Περιόδους

Ένα (επενδυμένο) κεφάλαιο P αποδίδει τόκο με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο r , με βάση k περιόδους ανατοκισμού, αν το ποσό ανατοκίζεται σε k περιόδους ανά έτος, σε κάθε μία από τις οποίες θεωρείται απλό επιτόκιο r/k . Δηλαδή, στο τέλος της πρώτης περιόδου στο αρχικό ποσό P θα προστεθεί τόκος με απλό επιτόκιο r/k , δηλαδή θα γίνει

$$P \left(1 + \frac{r}{k} \right).$$

Την δεύτερη περίοδο το παραπάνω ποσό τοκίζεται και πάλι (ανατοκίζεται) με επιτόκιο r/k και επομένως στο τέλος της δεύτερης περιόδου θα γίνει

$$P \left(1 + \frac{r}{k} \right) \left(1 + \frac{r}{k} \right) = P \left(1 + \frac{r}{k} \right)^2,$$

κ.ο.κ. στο τέλος της k -οστής περιόδου (δηλαδή μετά ακριβώς από ένα έτος) η επένδυση του αρχικού κεφαλαίου P αποδίδει το ποσό

$$P \left(1 + \frac{r}{k} \right)^k.$$

Με το ίδιο σκεπτικό, μετά από m χρόνια, θα αποδοθεί ποσό $P(1 + r/k)^{mk}$.

Για παράδειγμα, αρχικό κεφάλαιο $P = 100000$ ευρώ δανείζεται (π.χ. σε μία τράπεζα μέσω κατάθεσης σε λογαριασμό ταμειευτηρίου ή π.χ. σε μία επιχείρηση ή το κράτος αγοράζοντας ομόλογα δημοσίου) με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο 6% με τριμηνιαίο ανατοκισμό (δηλ. $k = 4$). Στο τέλος του έτους θα πρέπει να επιστραφεί το ποσό

$$P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = 100000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 = 106136 \text{ ευρώ.}$$

Είναι φανερό ότι στο τέλος του έτους αντιστοιχεί *πραγματικό* επιτόκιο 6.136% αντί 6% που είναι το ονομαστικό. Το πραγματικό επιτόκιο αυξάνει όσο αυξάνονται οι περίοδοι ανατοκισμού.

2.1.2. Συνεχής Ανατοκισμός

Ένα (επενδυμένο) κεφάλαιο P αποδίδει τόκο με *ονομαστικό* ετήσιο επιτόκιο r , με *συνεχή ανατοκισμό*, αν έχουμε $k \rightarrow \infty$ περιόδους ανατοκισμού. Στο τέλος του έτους θα πρέπει να αποδοθεί ποσό ίσο με

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = Pe^r,$$

Γενικά, μετά από t έτη ($t \in (0, \infty)$) το αρχικό κεφάλαιο P αποδίδει το ποσό Pe^{rt} .

Για παράδειγμα, σε $P = 100000$ ευρώ με *ονομαστικό* ετήσιο επιτόκιο 6% με συνεχή ανατοκισμό μετά από ένα έτος αντιστοιχεί ποσό $100000e^{0.06} = 106184$ (*πραγματικό* επιτόκιο 6.184%). Ενώ μετά από έναν μήνα ($t = 1/12$) αντιστοιχεί ποσό $100000e^{0.06/12} = 100501$.

Το r καλείται και *συνεχές σύνθετο επιτόκιο* ή *ρυθμός επιτοκίου*. Στο εξής θα θεωρούμε ότι όλα τα επιτόκια της αγοράς αναφέρονται σε συνεχή ανατοκισμό.

2.1.3. Κυμαινόμενο Επιτόκιο με Συνεχή Ανατοκισμό

Το μοντέλο του συνεχούς ανατοκισμού που είδαμε παραπάνω μπορεί ισοδύναμα να περιγραφεί ως εξής: Έστω ότι ποσό P τοποθετείται σε μία επένδυση που προσφέρει τόκο με επιτόκιο r (ονομαστικό, ετήσιο, με συνεχή ανατοκισμό). Ας συμβολίσουμε με $P(t)$ την αξία του επενδυμένου ποσού μετά από χρόνο t ($P(0) = P$). Μπορεί να θεωρηθεί ότι σε κάθε πολύ μικρό χρονικό διάστημα $(t, t + \Delta t]$ προστίθεται στο $P(t)$ τόκος ίσος με $P(t)r\Delta t$ (επιτόκιο $r\Delta t$), δηλαδή,

$$P(t + \Delta t) \approx P(t) + P(t)r\Delta t \quad \text{όταν} \quad \Delta t \approx 0 \quad (\text{για κάθε } t)^1$$

ή σχηματικά $P(t + dt) = P(t) + P(t)r dt$ ή $dP(t) = P(t)r dt$ και επομένως

$$P'(t) = \frac{dP(t)}{dt} = P(t)r \quad (\text{για κάθε } t).$$

Αυτή είναι μια απλή διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση $P(t)$ (διότι στην εξίσωση εμφανίζεται η $P(t)$ και η παράγωγός της $P'(t)$). Μπορούμε εύκολα να «λύσουμε» αυτή τη διαφορική εξίσωση και να βρούμε την συνάρτηση $P(t)$ που την ικανοποιεί:

¹ Πιο αυστηρά, $P(t + \Delta t) = P(t) + P(t)r\Delta t + o(\Delta t)$ όπου $o(\Delta t)$ είναι μία συνάρτηση με την ιδιότητα $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$.

$$P'(t) = P(t)r \Leftrightarrow \frac{P'(t)}{P(t)} = r \Leftrightarrow (\ln P(t))' = r \quad (\text{για κάθε } t),$$

και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη ως προς t στο $[0, x]$ θα είναι

$$\int_0^x (\ln P(t))' dt = \int_0^x r dt \Leftrightarrow \ln P(x) - \ln P(0) = rx \Leftrightarrow P(x) = P(0)e^{rx}.$$

Δηλαδή εξάγουμε και πάλι τον γνωστό τύπο που αντιστοιχεί σε συνεχή ανατοκισμό με επιτόκιο r .

Προφανώς στα παραπάνω έχουμε θεωρήσει ότι το επιτόκιο r είναι σταθερό. Σε ορισμένες εφαρμογές όπως το επιτόκιο μπορεί γενικότερα να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση του χρόνου. Ακολουθώντας και πάλι την παραπάνω διαδικασία, θέτοντας $r(t)$ στη θέση του r , σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα $(t, t+dt]$ προστίθεται στο $P(t)$ τόκος ίσος με $P(t)r(t)dt$, δηλαδή,

$$P(t+dt) = P(t) + P(t)r(t)dt \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad dP(t) = P(t)r(t)dt \quad (\text{για κάθε } t),$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση έχει την ίδια απλή μορφή με την παραπάνω και λύνεται παρομοίως:

$$\int_0^x (\ln P(t))' dt = \int_0^x r(t)dt \Leftrightarrow \ln P(x) - \ln P(0) = \int_0^x r(t)dt \Leftrightarrow P(x) = P(0)e^{\int_0^x r(t)dt}.$$

2.1.4. Παρούσα και Μελλοντική Αξία.

Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι στην αγορά μπορεί κανείς πάντοτε να δανείσει ή να δανεισθεί με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο r (συνεχούς ανατοκισμού) χωρίς να υπάρχει ρίσκο (δηλαδή ο δανειζόμενος θα επιστρέψει πάντοτε το ποσό συν τον τόκο που αντιστοιχεί). Το r θα καλείται *επιτόκιο χωρίς κίνδυνο της αγοράς* (risk-free interest rate) και συνήθως αναφέρεται στο επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς που έχουν το μικρότερο κίνδυνο. Το επιτόκιο αυτό στην πράξη δεν είναι σταθερό, αλλά στο εξής θα μελετάμε την αγορά σε έναν χρονικό ορίζοντα μέσα στον οποίο μπορούμε για απλότητα να θεωρήσουμε ότι το r παραμένει σταθερό (στο τελευταίο κεφάλαιο θα εξετάσουμε και κάποια μοντέλα με μη σταθερό – στοχαστικό επιτόκιο).

Επομένως ένα χρηματικό ποσό που σήμερα έχει παρούσα (προεξοφλημένη) αξία P , μετά από χρόνο t (μετρούμενο σε έτη) θα έχει μελλοντική αξία Pe^{rt} (αν επένδυε κανείς σήμερα το ποσό P σε ομόλογα με επιτόκιο r , μετά από χρόνο t θα ελάμβανε το ποσό Pe^{rt}). Αντίθετα ένα ποσό που μετά από χρόνο t έχει μελλοντική αξία A , σήμερα θα έχει παρούσα αξία Ae^{-rt} (αν επένδυε κανείς σήμερα το ποσό Ae^{-rt} σε ομόλογα με επιτόκιο r , μετά από χρόνο t θα ελάμβανε το ποσό $Ae^{-rt}e^{rt} = A$).

Παράδειγμα. Έστω ότι κάποιος καταβάλλει το ποσό A σε καθένα από τους χρόνους $0, t, 2t, \dots, (n-1)t$ (θεωρούμε ετήσιο επιτόκιο r). Η παρούσα αξία του συνολικού ποσού που έχει καταβληθεί θα είναι

$$A + Ae^{-rt} + Ae^{-r2t} + \dots + Ae^{-r(n-1)t} = A \sum_{i=0}^{n-1} (e^{-rt})^i = A \frac{1 - (e^{-rt})^n}{1 - e^{-rt}}$$

ενώ η μελλουσα αξία του συνολικού ποσού π.χ. στο χρόνο τ θα είναι

$$A \frac{1 - (e^{-rt})^n}{1 - e^{-rt}} e^{rt}.$$

Αν π.χ. κάποιος επιθυμεί να δανεισθεί σήμερα ένα ποσό P και συμφωνεί να το ξεχρεώσει καταβάλλοντας n δόσεις A στους χρόνους $0, t, 2t, \dots, (n-1)t$ τότε κάθε δόση A θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$P = A \frac{1 - (e^{-rt})^n}{1 - e^{-rt}} \Rightarrow A = P \frac{1 - e^{-rt}}{1 - e^{-rnt}}.$$

Π.χ. αν $P = 100000$, $r = 4\%$, $n = 12 \cdot 30$, $t = 1/12$, τότε $A = 476.21$.

Προφανώς, αν πρέπει να συγκρίνουμε δύο χρηματικά ποσά, αυτό θα πρέπει να γίνεται στον ίδιο χρόνο (π.χ. με βάση την παρούσα αξία τους ή την μέλλουσα αξία τους στον ίδιο χρόνο t). Στο εξής ο χρόνος θα μετράται σε έτη και τα επιτόκια θα είναι ονομαστικά ετήσια (με συνεχή ανατοκισμό).

2.2. Τιμολόγηση Forwards και Futures

Ένα πρόβλημα που τίθεται αναφορικά με τα προθεσμιακά συμβόλαια (Forwards) και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ, Futures) είναι ο καθορισμός της τιμής συναλλαγής (delivery price). Επίσης μας ενδιαφέρει να δούμε πως μπορεί να διαμορφώνεται η τιμή αγοράς ή πώλησης ενός ΣΜΕ μετά την σύναψή του και πριν την λήξη του (όπως είδαμε ΣΜΕ αγοράζονται και πωλούνται στο χρηματιστήριο παραγώγων μέχρι και την λήξη τους). Ακόμη ένα πρόβλημα, όπως θα δούμε αρκετά πιο πολύπλοκο από τα προηγούμενα, είναι ο καθορισμός της τιμής C ενός δικαιώματος προαίρεσης.

Αρχικά θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα που αφορούν τα ΠΣ και τα ΣΜΕ. Όπως θα δούμε μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό με σχετικά απλό τρόπο. Στη συνέχεια θα περάσουμε στο πρόβλημα που αφορά τα δικαιώματα προαίρεσης. Αν και το πρόβλημα αυτό εκ πρώτης όψεως ίσως φαίνεται απλό, θα αποδειχθεί ότι είναι αρκετά πιο πολύπλοκο. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι για ένα τόσο πρακτικό πρόβλημα απαιτείται η χρήση θεωρητικών εργαλείων όπως η θεωρία στοχαστικών ανελίξεων και ειδικότερα η στοχαστική ανάλυση. Τα τελευταία χρόνια η σχετική θεωρία έχει αναπτυχθεί αρκετά, και συνεχίζει να αναπτύσσεται, στην προσπάθεια ικανοποιητικής μαθηματικής μοντελοποίησης μιας χρηματοοικονομικής αγοράς.

Για να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα υποθέτουμε απλουστευτικά ότι

- Στην αγορά δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών (transaction costs), ενώ όλα τα κέρδη φορολογούνται με τον ίδιο τρόπο (ίδιο φορολογικό συντελεστή).
- Οι συναλλασσόμενοι μπορούν να δανείζουν και να δανείζονται με το ίδιο (ετήσιο, ονομαστικό) επιτόκιο r χωρίς κίνδυνο (risk free interest rate) με συνεχή ανατοκισμό.
- Οι συναλλασσόμενοι δρουν λογικά, σύμφωνα με τις προσδοκίες τους, και προσπαθούν να εκμεταλλευτούν οποιαδήποτε ευκαιρία για σίγουρο κέρδος εμφανίζεται. Αυτή η τελευταία παραδοχή είναι αρκετά σημαντική διότι σύμφωνα με αυτήν, μόλις εμφανιστεί μια ευκαιρία για arbitrage στην αγορά (δηλ. μια στρατηγική αγοραπωλησιών μετοχών, ομολόγων και παραγώγων που αποφέρει σίγουρο κέρδος), τότε αρκετοί επενδυτές θα σπεύσουν να την εκμεταλλευτούν με συνέπεια αυτή σύντομα να χαθεί (η αγορά θα βρεθεί πολύ γρήγορα σε «κατάσταση ισορροπίας»).

Αυτό μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε ότι οι τιμές που αφορούν τα διάφορα παράγωγα προϊόντα είναι τέτοιες ώστε να εξασφαλίζεται «ισορροπία» στην αγορά (δηλ. δεν προσφέρεται δυνατότητα για arbitrage). Αν δεν ίσχυε αυτό, π.χ. η τιμή C ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι χαμηλή, προσφέροντας δυνατότητα για arbitrage, τότε θα αυξηθεί η ζήτησή του με συνέπεια πολύ σύντομα να αυξηθεί η τιμή του μέχρι να χαθεί αυτή η ευκαιρία για arbitrage.

Ξεκινάμε λοιπόν με το απλούστερο πρόβλημα που είναι ο καθορισμός της τιμής συναλλαγής (delivery price) στα προθεσμιακά συμβόλαια (Forwards) και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ, Futures).

Ας υποθέσουμε ότι σήμερα επιθυμούμε να συνάψουμε ένα ΣΜΕ (π.χ. να λάβουμε long position) επί ενός αγαθού (π.χ. 100 μετοχές AAA) με ημερομηνία παράδοσης μετά από $T \in (0, \infty)$ έτη. Με αυτό το συμβόλαιο υποσχόμαστε να αγοράσουμε μετά από χρόνο T το υποκείμενο αγαθό από τον αντισυμβαλλόμενο (αυτόν που έχει λάβει short position) σε μία προκαθορισμένη τιμή K . Ποια θα πρέπει να είναι όμως η τιμή συναλλαγής K ; Μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή;

Έστω S_t η τιμή του υποκείμενου αγαθού (π.χ. των 100 μετοχών AAA) μετά από χρόνο t . Επομένως σήμερα, ημέρα σύναψης του ΣΜΕ, το αγαθό αυτό έχει τιμή S_0 ενώ στο χρόνο T λήξης του ΣΜΕ θα έχει τιμή S_T . Η σημερινή τιμή S_0 είναι γνωστή ενώ η τιμή S_T είναι τυχαία μεταβλητή με κάποια κατανομή. Σε αυτό το σημείο μπορεί κάποιος να υποθέσει ότι η προκαθορισμένη τιμή αγοραπωλησίας K του υποκείμενου αγαθού θα πρέπει να είναι ίση με την αναμενόμενη τιμή του αγαθού στο χρόνο παράδοσης, δηλαδή $K = E(S_T)$. Όπως θα δούμε όμως στη συνέχεια κάτι τέτοιο, αν και φαίνεται αρκετά λογικό, **δεν ισχύει**.

Από που πρέπει όμως να ξεκινήσουμε για να προσδιορίσουμε την τιμή K ; Το κλειδί είναι να εκμεταλλευτούμε την υπόθεση ότι η αγορά βρίσκεται σε «κατάσταση ισορροπίας». Αυτό σημαίνει ότι η τιμή K πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μην δημιουργείται ευκαιρία για arbitrage. Ακόμη και αν η K καθοριστεί διαφορετικά ώστε να οδηγεί σε arbitrage, πολύ γρήγορα, μέσα από τους κανόνες της προσφοράς και της ζήτησης, θα αρχίσει να μεταβάλλεται ώσπου να φτάσει στην τιμή «ισορροπίας» στην οποία δεν προσφέρεται πια ευκαιρία για arbitrage (αν π.χ. η K ήταν χαμηλή, θα έσπευδαν αρκετοί να λάβουν long position στο ΣΜΕ με αποτέλεσμα να αυξηθεί η K). Αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση η οποία αφορά ΣΜΕ και ΠΣ επί ενός αγαθού του οποίου η κατοχή δεν προσφέρει κάποιο εισόδημα (π.χ. μέρισμα ή κάποιο τόκο).

Πρόταση 2.2.1. *Η τιμή συναλλαγής K (delivery price) ενός ΣΜΕ ή ενός ΠΣ με λήξη μετά από T έτη, η οποία δεν οδηγεί σε arbitrage είναι*

$$K = S_0 e^{rT},$$

όπου S_0 η τιμή του υποκείμενου αγαθού την ημέρα σύναψης του συμβολαίου και r το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο της αγοράς.

Απόδειξη. Έστω ότι για την τιμή συναλλαγής K ισχύει ότι

$$K > S_0 e^{rT}.$$

Στην περίπτωση αυτή ένας επενδυτής μπορεί σήμερα να λάβει short position (υπόσχεται να πωλήσει) σε ένα ΣΜΕ αυτού του τύπου και παράλληλα να δανεισθεί το ποσό S_0 (με επιτόκιο r) και να αγοράσει την υποκείμενη μετοχή (δηλ. 100 μετοχές AAA). Στο χρόνο λήξης του συμβολαίου, ο επενδυτής αυτός θα πωλήσει σύμφωνα με το ΣΜΕ την υποκείμενη μετοχή (που αγόρασε στο χρόνο 0) στην τιμή K και θα εξοφλήσει το δάνειο που έλαβε καταβάλλοντας ποσό $S_0 e^{rT}$. Ο επεν-

δυτής αυτός θα έχει σίγουρο κέρδος $K - S_0 e^{rT} > 0$, και επομένως προσφέρεται δυνατότητα για arbitrage στην αγορά.

Με τον ίδιο τρόπο, αν

$$K < S_0 e^{rT},$$

τότε ο επενδυτής μπορεί σήμερα να λάβει long position (υπόσχεται να αγοράσει) σε ένα ΣΜΕ αυτού του τύπου και παράλληλα πωλεί ανοιχτά (short sell) την υποκείμενη μετοχή λαμβάνοντας το ποσό S_0 το οποίο και επενδύει (με επιτόκιο r). Στο χρόνο λήξης του συμβολαίου, ο επενδυτής αυτός θα αγοράσει σύμφωνα με το ΣΜΕ την υποκείμενη μετοχή (κλείνοντας την ανοιχτή θέση που είχε λάβει) στην τιμή K και θα λάβει από την επένδυση το ποσό $S_0 e^{rT}$. Επομένως ο επενδυτής αυτός θα έχει σίγουρο κέρδος $S_0 e^{rT} - K > 0$, δηλαδή υπάρχει και πάλι δυνατότητα για arbitrage στην αγορά.

Επομένως, θα πρέπει να ισχύει $K = S_0 e^{rT}$ διότι διαφορετικά θα υπάρχει δυνατότητα για arbitrage. Η παραπάνω δικαιολόγηση ισχύει και για τα ΠΣ. □

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω ότι συνάπτουμε ένα ΠΣ τριών μηνών επί 100 μετοχών AAA (οι οποίες δεν αποδίδουν μέρισμα στους τρεις αυτούς μήνες). Η σημερινή τιμή της μετοχής AAA είναι 20 ευρώ (δηλ. $S_0 = 2000$) ενώ το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο της αγοράς είναι 6%. Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, για να μην υπάρχει arbitrage στην αγορά η τιμή συναλλαγής (delivery price) θα πρέπει να είναι

$$K = S_0 e^{rT} = (20 \cdot 100) e^{0.06 \cdot \frac{1}{4}} \approx 2030.23 \text{ €}.$$

Είναι ενδιαφέρον να δούμε ποια είναι η αξία ενός ΣΜΕ ή ενός ΠΣ με delivery price K (το οποίο δεν είναι αναγκαστικά αυτό που δεν οδηγεί σε arbitrage) μετά την σύναψή του και πριν την λήξη του. Έστω $f(t)$ η αξία του ΣΜΕ στο χρόνο $t \in [0, T]$, όπου T ο χρόνος παράδοσης (εννοούμε την αξία της θέσης long – η αξία της θέσης short είναι η αντίθετη $-f(t)$). Ισχύει η επόμενη πρόταση:

Πρόταση 2.2.2. Η αξία ενός ΣΜΕ ή ενός ΠΣ (με λήξη μετά από T έτη) στο χρόνο $t < T$, η οποία δεν οδηγεί σε arbitrage είναι

$$f(t) = S_t - K e^{-r(T-t)},$$

όπου S_t η τιμή του υποκείμενου αγαθού στο χρόνο t και r το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο της αγοράς.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι το υποκείμενο αγαθό είναι μια μετοχή AAA. Θεωρούμε τα παρακάτω δύο χαρτοφυλάκια:

- Το χαρτοφυλάκιο A το οποίο αποτελείται από ένα συμβόλαιο long forward (του τύπου που περιγράφεται στην εκφώνηση) και ένα ομόλογο στο οποίο έχει επενδυθεί πόσο $K e^{-rT}$ στο χρόνο 0.
- Το χαρτοφυλάκιο B το οποίο αποτελείται από μια μετοχή AAA.

Παρατηρούμε ότι στο χρόνο T λήξης του συμβολαίου, και τα δύο χαρτοφυλάκια θα αποτελούνται από μία μετοχή AAA. Πράγματι, στο χρόνο T ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου A θα λάβει από το ομόλογο το ποσό $K e^{-rT} e^{rT} = K$ το οποίο θα χρησιμοποιήσει για να αγοράσει μια μετοχή

AAA βάσει του long forward συμβολαίου. Δηλαδή, στο χρόνο T τα δύο χαρτοφυλάκια έχουν την ίδια αξία. Επομένως τα δύο χαρτοφυλάκια θα πρέπει πάντοτε να έχουν την ίδια no-arbitrage αξία. Αν π.χ. δεν έχουν την ίδια αξία σε κάποιο χρόνο $t < T$ τότε μπορεί κανείς να αγοράσει το πιο «φθηνό» χαρτοφυλάκιο και να πωλήσει ανοιχτά (short sell) το πιο «ακριβό» κλείνοντας την ανοιχτή του θέση στο χρόνο T . Προφανώς σε αυτή την περίπτωση υπάρχει σίγουρο κέρδος (arbitrage).

Στο χρόνο t το χαρτοφυλάκιο A έχει αξία $f(t) + Ke^{-rT}e^{rt} = f(t) + Ke^{-r(T-t)}$ ενώ το χαρτοφυλάκιο B έχει αξία S_t . Σύμφωνα με τα όσα εκθέσαμε παραπάνω, για να μην υπάρχει arbitrage θα πρέπει να ισχύει ότι

$$f(t) + Ke^{-r(T-t)} = S_t, t < T$$

από όπου προκύπτει το αποτέλεσμα της πρότασης. $\square$

Παρατήρηση 2.2.1. Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι $f(0) = S_0 - Ke^{-r(T-0)}$. Επειδή όπως έχουμε αναφέρει και στο πρώτο Κεφάλαιο δεν κοστίζει τίποτε να λάβει κανείς μία θέση σε ένα ΠΣ ή ένα ΣΜΕ όταν αυτό συνάπτεται ($t = 0$), θα πρέπει

$$f(0) = 0 \text{ ή ισοδύναμα } S_0 - Ke^{-r(T-0)} = 0 \Rightarrow K = S_0 e^{rT}$$

Επαληθεύοντας την Πρόταση 2.2.1.

Παράδειγμα 2.2.2. (Συνέχεια του Παραδείγματος 2.2.1) Έστω και πάλι το ΠΣ τριών μηνών επί 100 μετοχών AAA (η οποία δεν αποδίδει μέρισμα στους τρεις αυτούς μήνες) με τιμή συναλλαγής $K = 2030$ (θεωρούμε ότι τελικά έγινε συμφωνία σε αυτή την τιμή και όχι στην no-arbitrage τιμή 2030.23 – στην πράξη συνήθως δεν υπάρχει δυνατότητα για arbitrage όταν υπάρχει μια τόσο μικρή απόκλιση της τιμής στην αγορά από την no-arbitrage τιμή διότι υπάρχουν και διάφορα άλλα κόστη, π.χ. κόστη συναλλαγών). Έχει περάσει ένας μήνας από την σύναψη του συμβολαίου και η σημερινή αξία της μετοχής AAA είναι 22 ευρώ (από 20 που είχε). Ποια είναι η αξία του ΠΣ σήμερα (no-arbitrage value);

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.2, για να μην υπάρχει arbitrage στην αγορά, η σημερινή αξία ($t = 1/12$) του συμβολαίου (long forward) θα πρέπει είναι

$$f(t) = S_t - Ke^{-r(T-t)} = 22 \cdot 100 - 2030 \cdot e^{-0.06(\frac{1}{4} - \frac{1}{12})} \approx 190.2 \text{ €}.$$

2.3. Χρηματοοικονομική αγορά και Χαρτοφυλάκια

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε μια πιο τυποποιημένη διαδικασία για την μελέτη προβλημάτων όπως αυτά που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Ας δώσουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 2.3.1. Χρηματοοικονομική αγορά ή απλώς αγορά θα καλείται μία δομή από κ χρηματοοικονομικούς τίτλους π.χ. μετοχές, παράγωγα, ομόλογα, κ.ο.κ. Ας ονομάσουμε αυτούς τους τίτλους ως τίτλος 1, τίτλος 2, ..., τίτλος κ . Επίσης, συμβολίζουμε με $S_i(t)$ την αξία μιας μονάδας του i τίτλου στο χρόνο t (ο χρόνος μπορεί να είναι διακριτός ή συνεχής). Στο εξής συμφωνούμε όλες οι χρηματικές αξίες τίτλων να μετρώνται στο ίδιο νόμισμα (π.χ. ευρώ ή δολάριο).

Ορισμός 2.3.2. Ένα χαρτοφυλάκιο (portfolio) είναι ένα σύνολο τίτλων μιας αγοράς του οποίου η σύνθεση περιγράφεται από ένα διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_\kappa)$. Το x_i εκφράζει το πλήθος

των τεμαχίων του τίτλου i που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο και μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και μάλιστα μπορεί να είναι αρνητικός (αν $x_i < 0$ τότε το χαρτοφυλάκιο είναι short x_i μονάδες του τίτλου i). Η σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου μπορεί να παραμένει σταθερή στην διάρκεια του χρόνου, μπορεί όμως και να αλλάζει, δηλαδή οι ποσότητες $x_1, x_2, \dots, x_k$ μπορεί να είναι συναρτήσεις του χρόνου.

Ορισμός 2.3.3. Αξία ενός χαρτοφυλακίου με σύνθεση $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ στο χρόνο t είναι η ποσότητα

$$V_t = \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(t)' = (x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot (S_1(t), S_2(t), \dots, S_k(t))' = \sum_{i=1}^k x_i S_i(t),$$

(με $\mathbf{A}'$ συμβολίζουμε τον ανάστροφο του πίνακα $\mathbf{A}$). Το διάνυσμα $\mathbf{S}(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_k(t))$ δίνει την αξία των k τίτλων της αγοράς στο χρόνο t .

Παρατήρηση 2.3.1. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, ας αποδείξουμε ξανά την Πρόταση 2.2.2. Αρκεί να θεωρήσουμε ότι στην αγορά υπάρχουν μόνο 3 τίτλοι:

- (1) ο τίτλος 1 είναι ένα ομόλογο επί μιας χρηματικής μονάδας (στο χρόνο 0), με επιτόκιο r (δηλαδή στο χρόνο t προσφέρει απόδοση e^{rt}),
- (2) ο τίτλος 2 είναι η μετοχή AAA,
- (3) ο τίτλος 3 είναι το *long forward* συμβόλαιο επί 1 μετοχής AAA με τιμή παράδοσης K και χρόνο παράδοσης T .

Στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.2 στην ουσία χρησιμοποιήσαμε τα χαρτοφυλάκια με σταθερή σύνθεση,

$$\text{Χαρτοφυλάκιο A: } (Ke^{-rT}, 0, 1) \quad \text{και} \quad \text{Χαρτοφυλάκιο B: } (0, 1, 0)$$

Στο χρόνο $t < T$ οι τρεις παραπάνω τίτλοι έχουν αξία $(e^{rt}, S_t, f(t))$ ενώ στο χρόνο $t = T$ αντίστοιχα έχουν αξία $(e^{rT}, S_T, S_T - K)$. Επομένως τα δύο χαρτοφυλάκια θα έχουν αξία στο χρόνο $t \leq T$:

- Αξία χαρτοφυλακίου A στο χρόνο t :

$$V_t^A = \begin{cases} (Ke^{-rT}, 0, 1) \cdot (e^{rt}, S_t, f(t))' = Ke^{-rT} \cdot e^{rt} + 0 \cdot S_t + 1 \cdot f(t) = Ke^{-r(T-t)} + f(t), & t < T \\ (Ke^{-rT}, 0, 1) \cdot (e^{rT}, S_T, S_T - K)' = Ke^{-rT} \cdot e^{rT} + 0 \cdot S_T + 1 \cdot (S_T - K) = S_T, & t = T \end{cases}$$

- Αξία χαρτοφυλακίου B στο χρόνο t :

$$V_t^B = \begin{cases} (0, 1, 0) \cdot (e^{rt}, S_t, f(t))' = S_t, & t < T \\ (0, 1, 0) \cdot (e^{rT}, S_T, S_T - K)' = S_T, & t = T \end{cases} = S_t, \quad t \leq T.$$

Είναι φανερό ότι στο χρόνο T και τα δύο χαρτοφυλάκια έχουν την ίδια αξία S_T και επομένως θα έχουν ίση αξία για $t < T$ (αλλιώς, όπως εκθέσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.2, υπάρχει δυνατότητα για arbitrage), δηλαδή προκύπτει και πάλι ότι

$$Ke^{-r(T-t)} + f(t) = S_t \Leftrightarrow f(t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Παρατήρηση 2.3.2. Αντί των δύο χαρτοφυλακίων που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.2 και της Παρατήρησης 2.3.1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα χαρτοφυλάκια:

- *Χαρτοφυλάκιο A'*: $(0, 0, 1)$, δηλαδή ένα long forward επί της μετοχής AAA,
- *Χαρτοφυλάκιο B'*: $(-Ke^{-rT}, 1, 0)$, δηλαδή έχει πωληθεί (short) ένα ομόλογο επί ποσού Ke^{-rT} στο χρόνο 0 (ή ισοδύναμα έχει ληφθεί δάνειο ποσού Ke^{-rT} στο χρόνο 0, π.χ. μέσω εκδόσεως ομολόγου) και επίσης το χαρτοφυλάκιο περιέχει και μία μετοχή AAA.

Είναι εύκολο να δούμε ότι στο χρόνο T και τα δύο παραπάνω χαρτοφυλάκια έχουν αξία $S_T - K$ και επομένως θα έχουν ίδια no-arbitrage αξία και στο παρελθόν,

$$f(t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}, t < T.$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση το πρώτο χαρτοφυλάκιο περιέχει μόνο το παράγωγο του οποίου θέλουμε να βρούμε την αξία. Το δεύτερο χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από ομόλογα και μετοχές αλλά όπως είδαμε έχει ακριβώς την ίδια αξία με το πρώτο. Με άλλα λόγια επιτύχαμε να αναπαράγουμε το κέρδος από ένα long forward κατασκευάζοντας ένα άλλο χαρτοφυλάκιο. Το δεύτερο χαρτοφυλάκιο καλείται και **replicating portfolio** ή **hedging portfolio** (**χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης**) διότι αν έχουμε στην κατοχή μας το A' (δηλ. ένα long forward συμβόλαιο) τότε μπορούμε πωλώντας ένα χαρτοφυλάκιο B' (ισοδύναμα κατασκευάζοντας το χαρτοφυλάκιο $-B'$: $(Ke^{-rT}, -1, 0)$) να καλύψουμε οποιαδήποτε ζημία (ή κέρδος) από το A' . Δηλαδή πωλώντας το B' εξασφαλισθήκαμε πλήρως έναντι του κινδύνου που αντιμετωπίζαμε από την κατοχή του A' .

Παρατήρηση 2.3.3. Εάν το συμβόλαιο ήταν επί μιας μετοχής που αποδίδει μέρισμα (ή γενικότερα επί ενός τίτλου που αποδίδει κάποιο εισόδημα) μέχρι την ημέρα συναλλαγής, τότε δεν ισχύει ο παραπάνω τύπος. Με παρόμοιο τρόπο όμως μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$K = (S_0 - I)e^{rT} \text{ και } f(t) = S_t - I - Ke^{-r(T-t)},$$

όπου I είναι η παρούσα αξία στο χρόνο $t = 0$ του εισοδήματος που αποδίδει η κατοχή του υποκείμενου αγαθού (αφήνεται ως άσκηση).

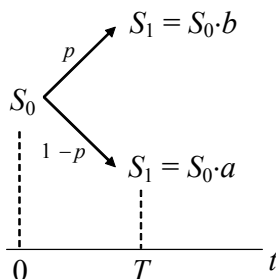
2.4. Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης - Διωνυμικό Μοντέλο Μιας Περιόδου

Σε αυτή την παράγραφο θα επιχειρήσουμε να μελετήσουμε το πρόβλημα εύρεσης της αξίας C (option price ή option premium) που θα πρέπει να έχει ένα συμβόλαιο προαίρεσης (αγοράς ή πώλησης, Ευρωπαϊκού τύπου) επί μιας μετοχής. Το κλειδί και εδώ και πάλι είναι να υποθέσουμε ότι η αγορά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και επομένως η τιμή C θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μην προσφέρεται ευκαιρία για arbitrage.

Δυστυχώς (ή ευτυχώς διότι με αυτή την αφορμή έχει αναπτυχθεί μία γόνιμη ερευνητική περιοχή) το πρόβλημα τώρα δεν είναι τόσο εύκολο όπως στην περίπτωση των ΣΜΕ και ΠΣ. Σε εκείνη την περίπτωση ουσιαστικά κατασκευάσαμε δύο χαρτοφυλάκια που περιέχουν τον τίτλο του οποίου επιθυμούμε να βρούμε την αξία και κάποιους άλλους τίτλους με γνωστή αξία. Τα χαρτοφυλάκια αυτά επιλέχθηκαν έτσι ώστε σε κάποια χρονική στιγμή (π.χ. στο χρόνο λήξης του συμβολαίου) να έχουν την ίδια αξία. Από το γεγονός αυτό συμπεράναμε ότι θα έχουν πάντοτε την ίδια no-arbitrage αξία και από την εξίσωση των αξιών τους προέκυπτε κάθε φορά η ζητούμενη αξία ενός τίτλου. Για τα δικαιώματα προαίρεσης όμως δεν είναι τόσο εύκολο να κατασκευάσουμε δύο χαρτοφυλάκια με τις παραπάνω ιδιότητες π.χ. το ένα να περιέχει ένα long call

και το άλλο, έχοντας την ίδια αξία με το πρώτο (π.χ. στο χρόνο λήξης T) να περιλαμβάνει κάποιους άλλους τίτλους με γνωστή αξία (δηλ. να είναι replicating ή hedging portfolio).

Η κατασκευή των χαρτοφυλακίων που περιγράφεται παραπάνω είναι δύσκολη στην γενική περίπτωση που οι τιμές των τίτλων αλλάζουν συνεχώς και με τυχαίο τρόπο (όπως γίνεται στην πράξη π.χ. για την τιμή της υποκείμενης μετοχής). Μπορούμε όμως να ξεκινήσουμε θεωρώντας ένα αρκετά απλοποιημένο μοντέλο: Θεωρούμε ότι η τιμή της υποκείμενης μετοχής στο χρόνο 0 είναι ίση με S_0 και στο χρόνο T λήξης του δικαιώματος θα είναι S_1 , με S_1 ίσο είτε με $S_0 \cdot a$ είτε με $S_0 \cdot b$ ($0 < a < b$). Το ποια από τις δύο τιμές θα λάβει τελικά η τιμή της μετοχής δεν είναι γνωστή σήμερα (στο χρόνο 0) και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ότι η S_1 είναι τυχαία μεταβλητή με δύο δυνατές τιμές ($S_0 \cdot b$, $S_0 \cdot a$) τις οποίες λαμβάνει με κάποιες πιθανότητες, έστω p και $1 - p$.



Υποθέτουμε επίσης ότι $0 < a < e^{r \cdot T} < b$, διότι αν $a < b < e^{r \cdot T}$ τότε η επένδυση σε ομόλογα έχει πάντοτε καλύτερη απόδοση από την επένδυση στη μετοχή και επομένως μπορεί κανείς να έχει σίγουρο κέρδος (arbitrage) αν πωλήσει short μετοχές και επενδύσει σε ομόλογα. Όμοια, υπάρχει arbitrage και όταν $e^{r \cdot T} < a < b$ (με έκδοση ομολόγου και αγορά μετοχών).

Το παραπάνω απλοποιημένο μοντέλο καλείται **διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου**. Το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου προφανώς δεν έχει καμία σχέση με την πραγματικότητα αλλά θα μας βοηθήσει να κάνουμε ένα πρώτο βήμα και να εικάσουμε τι μπορεί να γίνεται σε πιο σύνθετες περιπτώσεις. Σε αυτό το απλό μοντέλο θα δούμε ότι μπορούμε με σχετικά απλό τρόπο να βρούμε την τιμή ή ασφάλιστρο C ενός δικαιώματος αγοράς (call option), δηλαδή το ποσό που θα πρέπει να καταβάλλει ο αγοραστής (holder) στον πωλητή (writer) του συμβολαίου ώστε να αποκτήσει το δικαίωμα να αγοράσει μετά από χρόνο T (δικαίωμα ευρωπαϊκού τύπου) την υποκείμενη μετοχή από τον writer σε μία προκαθορισμένη τιμή K (η τιμή K και ο χρόνος T είναι γνωστά στο χρόνο 0). Συγκεκριμένα αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.4.1. Η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς (ευρωπαϊκού τύπου) στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου είναι ίση με

$$C = \frac{(e^{-r \cdot T} b - 1)(S_0 a - K)_+ + (1 - e^{-r \cdot T} a)(S_0 b - K)_+}{b - a}.$$

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε ότι στην αγορά διατίθενται οι παρακάτω τίτλοι:

- (1) ο τίτλος 1 είναι ένα ομόλογο επί μιας χρηματικής μονάδας (στο χρόνο 0), με επιτόκιο r (δηλαδή στο χρόνο t προσφέρει απόδοση $e^{r \cdot t}$),
- (2) ο τίτλος 2 είναι η υποκείμενη μετοχή (π.χ. AAA),
- (3) ο τίτλος 3 είναι το long call συμβόλαιο επί 1 μετοχής AAA με exercise price K , option price C και exercise date T .

Ας θεωρήσουμε τα χαρτοφυλάκια:

- Χαρτοφυλάκιο A: $(0, 0, 1)$ (αποτελείται από ένα long call)
- Χαρτοφυλάκιο B: $(\psi_0, \Delta_0, 0)$ (αποτελείται από ένα ομόλογο στο οποίο έχει επενδυθεί ποσό ψ_0 και Δ_0 μετοχές).

Έστω U_0 και U_1 η αξία του χαρτοφυλακίου A στο χρόνο 0 και T αντίστοιχα. Εφόσον το A αποτελείται μόνο από ένα long call συμβόλαιο, θα είναι $U_1 = (S_1 - K)_+$. Το U_0 θα εκφράζει την αξία αυτού του long call συμβολαίου στο χρόνο 0, δηλαδή την τιμή αγοράς του long call που αναζητούμε (option price ή option premium). Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τα ψ_0, Δ_0 έτσι ώστε το B να έχει την ίδια αξία με το A.

Εξισώνουμε την αξία που έχουν τα δύο παραπάνω χαρτοφυλάκια στο χρόνο T :

$$(S_1 - K)_+ = \psi_0 \cdot e^{r \cdot T} + \Delta_0 S_1.$$

Στον παραπάνω τύπο η S_1 είναι τυχαία μεταβλητή, λαμβάνει την τιμή $S_0 \cdot a$ με πιθαν. p και την τιμή $S_0 \cdot b$ με πιθαν. $1 - p$. Για να έχουν τα δύο χαρτοφυλάκια την ίδια αξία στο χρόνο T θα πρέπει να έχουν την ίδια αξία για κάθε ενδεχόμενη τιμή της S_1 , δηλαδή,

$$\begin{cases} (S_0 a - K)_+ = \psi_0 \cdot e^{r \cdot T} + \Delta_0 S_0 a \\ (S_0 b - K)_+ = \psi_0 \cdot e^{r \cdot T} + \Delta_0 S_0 b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_0 = \frac{(S_0 b - K)_+ - (S_0 a - K)_+}{S_0(b - a)} \\ \psi_0 = e^{-r \cdot T} \frac{b(S_0 a - K)_+ - a(S_0 b - K)_+}{b - a} \end{cases}$$

Επομένως, αν ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις, τα δύο χαρτοφυλάκια θα έχουν την ίδια αξία στο χρόνο T (το δεύτερο χαρτοφυλάκιο είναι το hedging portfolio του πρώτου που αποτελείται από ένα long call). Προφανώς θα έχουν την ίδια no-arbitrage αξία και στο χρόνο 0 δηλαδή,

$$U_0 = \psi_0 \cdot e^{r \cdot 0} + \Delta_0 S_0 = \psi_0 + \Delta_0 S_0$$

και επομένως, αφού $C = U_0$,

$$\begin{aligned} C &= e^{-r \cdot T} \frac{b(S_0 a - K)_+ - a(S_0 b - K)_+}{b - a} + \frac{(S_0 b - K)_+ - (S_0 a - K)_+}{S_0(b - a)} S_0 \\ &= \frac{(e^{-r \cdot T} b - 1)(S_0 a - K)_+ + (1 - e^{-r \cdot T} a)(S_0 b - K)_+}{b - a}. \end{aligned}$$

□

Η παραπάνω τιμή του C είναι θετική διότι έχουμε υποθέσει ότι $a < e^{r \cdot T} < b$.

Παρατήρηση 2.4.1. Από την παραπάνω απόδειξη είναι ενδιαφέρουσα η παρατήρηση ότι ένα long call «ισοδυναμεί» με ένα χαρτοφυλάκιο (το οποίο καλείται χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης - hedging portfolio) που αποτελείται από

$$(i) \quad \Delta_0 = \frac{(S_0 b - K)_+ - (S_0 a - K)_+}{S_0 b - S_0 a} \geq 0 \text{ μετοχές,}$$

και

$$(ii) \quad \psi_0 = e^{-r \cdot T} \frac{b(S_0 a - K)_+ - a(S_0 b - K)_+}{b - a} \leq 0 \text{ ποσό επενδυμένο σε ομόλογα,}$$

Το ψ_0 είναι εύκολο να δειχθεί ότι είναι αρνητικό και άρα αντιστοιχεί σε έκδοση μετοχών, δηλαδή πρόκειται για δάνειο. Επομένως αν κάποιος κατέχει ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο (δανειστεί ποσό ψ_0 και αγοράσει Δ_0 μετοχές) θα έχει πλήρως εξασφαλισθεί από μία short call θέση (στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου). Για να αγοράσει κανείς αυτό το χαρτοφυλάκιο προφανώς χρειάζεται ποσό $C = U_0 = \psi_0 + \Delta_0 S_0$.

Όπως προαναφέρθηκε, σκοπός ανάπτυξης του συγκεκριμένου μοντέλου ήταν να κάνουμε ένα πρώτο βήμα και να πάρουμε μια εικόνα για το που πρέπει να κατευθυνθούμε στη συνέχεια. Δυστυχώς, η μορφή του παραπάνω τύπου (Πρόταση 2.1.4.) δεν μπορούμε να πούμε ότι βοηθάει για αυτό το σκοπό. Όπως όμως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, αν γράψουμε (ισοδύναμα) τον παραπάνω τύπο με κατάλληλο τρόπο τότε θα αποκαλυφθεί τι περίπου πρέπει να ισχύει και σε πιο σύνθετα μοντέλα.

2.5. Αλλαγή του μέτρου πιθανότητας, ο «κόσμος ουδέτερου ρίσκου».

Είναι πολύ ενδιαφέρον το γεγονός ότι η no-arbitrage τιμή ενός call option που δίνεται από την παραπάνω πρόταση γράφεται ισοδύναμα και ως εξής:

$$U_0 = e^{-rT} \left(\frac{e^{rT} - a}{b - a} (S_0 b - K)_+ + \frac{b - e^{rT}}{b - a} (S_0 a - K)_+ \right) = e^{-rT} (q(S_0 b - K)_+ + (1 - q)(S_0 a - K)_+)$$

όπου συμβολίζουμε με q την ποσότητα $(e^{rT} - a)/(b - a)$. Η ποσότητα αυτή βρίσκεται μεταξύ του 0 και του 1 (διότι $a < e^{rT} < b$) και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ως μία πιθανότητα. Σε αυτό το σημείο είναι πολύ γόνιμη η εξής παρατήρηση: Αν είχαμε θεωρήσει ότι η τιμή S_1 της μετοχής στο χρόνο T λαμβάνει τις τιμές $S_0 b$ και $S_0 a$ με πιθανότητες q και $1 - q$ αντίστοιχα (αντί p και $1 - p$ όπως έχουμε υποθέσει ότι συμβαίνει στην πραγματικότητα) τότε ο τύπος που εκφράζει την no-arbitrage τιμή του C λαμβάνει την πολύ απλή και συνεκτική μορφή

$$C = U_0 = e^{-rT} \cdot E_Q(S_1 - K)_+.$$

Δηλαδή πρόκειται για την αναμενόμενη τιμή του τυχαίου κέρδους $(S_1 - K)_+$ από την χρήση του δικαιώματος αγοράς, επί τον συντελεστή (προεξόφλησης) e^{-rT} . Η μέση τιμή όμως δεν λαμβάνεται επί των «πραγματικών» πιθανοτήτων p και $1 - p$ αλλά των «εικονικών» q και $1 - q$. Ο δείκτης Q στην μέση τιμή υποδηλώνει αυτό το γεγονός.

Ας δούμε το παραπάνω λίγο αυστηρότερα. Η τυχαία μεταβλητή S_1 είναι μία απεικόνιση από έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ στο R όπου $\mathfrak{F}$ είναι το σύνολο όλων των ενδεχομένων του Ω και P είναι το μέτρο πιθανότητας που έχει οριστεί επάνω σε όλα τα ενδεχόμενα του $\mathfrak{F}$. Αρκεί σε αυτή την περίπτωση να θεωρήσουμε ότι $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ με $P(\{\omega_1\}) = p$, $P(\{\omega_2\}) = 1 - p$ ενώ

$$S_1(\omega_1) = S_0 b, \quad S_1(\omega_2) = S_0 a.$$

Δηλαδή η S_1 είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία λαμβάνει τις τιμές $S_0 b$ και $S_0 a$ με πιθανότητες p και $1 - p$. Η μέση τιμή της προφανώς θα είναι

$$E_P(S_1) = p \cdot S_0 b + (1 - p) \cdot S_0 a.$$

Ο δείκτης P στην μέση τιμή συνήθως παραλείπεται, αλλά εδώ αναγράφεται για να υποδηλώσει ότι η μέση τιμή λαμβάνεται με βάση το μέτρο πιθανότητας P . Επίσης, το αναμενόμενο κέρδος από τη χρήση του δικαιώματος αγοράς θα είναι

$$E_P(S_1 - K)_+ = p \cdot (S_0 b - K)_+ + (1 - p) \cdot (S_0 a - K)_+.$$

Αν «αλλάξουμε» τώρα το μέτρο πιθανότητας του Ω από P σε Q , δηλαδή θεωρήσουμε ότι $Q(\{\omega_1\}) = q$, $Q(\{\omega_2\}) = 1 - q$ τότε η τυχαία μεταβλητή S_1 ορισμένη στο νέο χώρο $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$ θα λαμβάνει τις τιμές $S_0 b$ και $S_0 a$ με πιθανότητες $q = (e^{r \cdot T} - a)/(b - a)$ και $1 - q$ αντίστοιχα. Άρα τώρα,

$$E_Q(S_1) = q \cdot S_0 b + (1 - q) \cdot S_0 a$$

και

$$E_Q(S_1 - K)_+ = q \cdot (S_0 b - K)_+ + (1 - q) \cdot (S_0 a - K)_+.$$

Επομένως, η μέση τιμή που εμφανίζεται στον τύπο $U_0 = e^{-rT} \cdot E_Q(S_1 - K)_+$ που είδαμε παραπάνω υπολογίζεται αφού «αλλάξουμε» το μέτρο πιθανότητας από P (που είναι το πραγματικό) σε Q . Αλλά ας δούμε τι χαρακτηριστικά έχει αυτό το νέο μέτρο πιθανότητας. Θα είναι,

$$E_Q(S_1) = q \cdot S_0 b + (1 - q) \cdot S_0 a = \frac{e^{r \cdot T} - a}{b - a} \cdot S_0 b + \frac{b - e^{r \cdot T}}{b - a} \cdot S_0 a = e^{r \cdot T} S_0,$$

και επομένως, στο χώρο $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$, η επένδυση στην μετοχή έχει αναμενόμενη απόδοση ίση με την απόδοση των ομολόγων. Προφανώς, στον *πραγματικό κόσμο* δεν ισχύει η παραπάνω ισότητα διότι τότε δεν θα υπήρχε κανένα κίνητρο να επενδύσει κανείς σε μετοχές αφού προσφέρουν την ίδια μέση απόδοση με τα ομόλογα τα οποία, αντίθετα από τις μετοχές, δεν έχουν κανένα επενδυτικό κίνδυνο (δηλ. στην πραγματικότητα θα πρέπει $E_P(S_1) > e^{rT} S_0$). Ισότητα θα ίσχυε μόνο αν οι επενδυτές δεν ενδιαφέρονταν για τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν, δηλαδή ήταν «ουδέτεροι» απέναντι στον κίνδυνο (δεν καταβάλλουν ποσό για να απαλλαγούν από κάποιο κίνδυνο και δεν απαιτούν κάποιο ποσό για να αναλάβουν κίνδυνο). Για αυτό και το μέτρο P αναφέρεται και ως μέτρο πιθανότητας στον «*πραγματικό κόσμο*» ενώ το Q αναφέρεται ως μέτρο πιθανότητας σε ένα «*κόσμο ουδέτερου ρίσκου*» (risk neutral probability measure).

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι το μέτρο πιθανότητας Q είναι *πλήρως εικονικό*. Χρησιμοποιείται μόνο για να εκφράσουμε με απλούστερο τρόπο την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης. Τελικά μπορούμε να διατυπώσουμε την επόμενη πρόταση η οποία αφορά το διωνυμικό μοντέλο αλλά όπως θα δούμε (και αυτό είναι το πολύ σημαντικό) ισχύει και γενικότερα.

Πρόταση 2.5.1. (risk neutral pricing formula) Η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς (Ευρωπαϊκού τύπου) στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου είναι ίση με

$$C = U_0 = e^{-rT} \cdot E_Q(S_1 - K)_+, \text{ όπου } Q \text{ τέτοιο ώστε } E_Q(S_1) = e^{rT} S_0,$$

δηλαδή είναι ίση με την *παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του δικαιώματος αγοράς σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου*.

Τα παραπάνω ισχύουν στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου το οποίο είναι πολύ απλό και δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει ικανοποιητικά την πραγματικότητα. Ένα πιο σύνθετο μοντέλο που προκύπτει φυσιολογικά γενικεύοντας το μοντέλο αυτό σε n περιόδους είναι το *διωνυμικό μοντέλο n περιόδων*. Πριν περάσουμε στην μελέτη αυτού του μοντέλου είναι απαραίτητο να υπενθυμίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο ορισμένες βασικές έννοιες από την θεωρία πιθανοτήτων και στοχαστικών ανελίξεων.

2.6. Σχέσεις μεταξύ των τιμών διαφόρων δικαιωμάτων (call – put, Αμερικανικού - Ευρωπαϊκού τύπου)

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι βρισκόμαστε σε μια αγορά χωρίς να έχουμε κάνει κάποια υπόθεση για την κίνηση της τιμής των τίτλων επί των οποίων εκδίδονται παράγωγα. Εξετάζουμε δηλαδή τη γενική περίπτωση, δεν θεωρούμε ότι ισχύει το απλουστευτικό διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου. Μας ενδιαφέρει να βρούμε τη σχέση, αν υπάρχει, μεταξύ της αξίας ενός δικαιώματος αγοράς και πώλησης καθώς και τη σχέση, αν υπάρχει, μεταξύ της αξίας ενός δικαιώματος Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου.

Ας συμβολίσουμε με $c_{call}(t)$ και $c_{put}(t)$ την αξία ενός call option και ενός put option (Ευρωπαϊκού τύπου) αντίστοιχα με τα ίδια χαρακτηριστικά (επί του ίδιου τίτλου, με ίδια T, K) στο χρόνο $t \in [0, T]$. Αν και δεν έχουμε ακόμη στη διάθεσή μας τα απαιτούμενα τεχνικά εργαλεία για να προσδιορίσουμε αυτές τις τιμές, μπορούμε να βρούμε μία σχέση μεταξύ τους και έτσι όταν καταφέρουμε να προσδιορίσουμε τη μία θα μπορούμε άμεσα να προσδιορίσουμε και την άλλη. Είναι προφανές ότι η τιμή αγοράς ενός δικαιώματος αγοράς, που ως τώρα έχουμε συμβολίσει με C , θα είναι ίση με $C = c_{call}(0)$ ενώ $c_{call}(T) = (S_T - K)_+$, $c_{put}(T) = (K - S_T)_+$.

Πρόταση 2.6.1. Η σχέση μεταξύ της τιμής ενός call option και ενός put option (Ευρωπαϊκού τύπου) δίνεται από την παρακάτω ισότητα (put-call parity),

$$c_{call}(t) + Ke^{-r(T-t)} = c_{put}(t) + S_t$$

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε ότι στην αγορά διατίθενται οι παρακάτω τίτλοι:

- (1) ο τίτλος 1 είναι ένα ομόλογο επί μιας χρηματικής μονάδας (στο χρόνο 0), με επιτόκιο r ,
- (2) ο τίτλος 2 είναι η υποκείμενη μετοχή (π.χ. AAA),
- (3) ο τίτλος 3 είναι το *long call* συμβόλαιο (Ευρωπ. τύπου) επί 1 μετοχής AAA με exercise price K , option price $C_{call} = c_{call}(0)$ και exercise date T .
- (4) ο τίτλος 4 είναι το *long put* συμβόλαιο (Ευρωπ. τύπου) επί 1 μετοχής AAA με exercise price K , option price $C_{put} = c_{put}(0)$ και exercise date T .

Ας θεωρήσουμε τώρα τα χαρτοφυλάκια στο χρόνο 0:

- Χαρτοφυλάκιο A: $(Ke^{-rT}, 0, 1, 0)$
- Χαρτοφυλάκιο B: $(0, 1, 0, 1)$

Στο χρόνο λήξης και τα δύο χαρτοφυλάκια θα έχουν την ίδια αξία

$$V_T^A = (Ke^{-rT}, 0, 1, 0) \cdot (e^{rT}, S_T, (S_T - K)_+, (K - S_T)_+)' = K + (S_T - K)_+ = \max\{S_T, K\}$$

$$V_T^B = (0, 1, 0, 1) \cdot (e^{rT}, S_T, (S_T - K)_+, (K - S_T)_+)' = S_T + (K - S_T)_+ = \max\{S_T, K\}$$

και επομένως θα έχουν την ίδια no-arbitrage αξία και σε κάθε $t \in [0, T]$. Δηλαδή, οι ακόλουθες αξίες θα πρέπει να είναι ίσες

$$V_t^A = (Ke^{-r(T-t)}, 0, 1, 0) \cdot (e^{rt}, S_t, c_{call}(t), c_{put}(t))' = Ke^{-r(T-t)} + c_{call}(t)$$

$$V_t^B = (0, 1, 0, 1) \cdot (e^{rt}, S_t, c_{call}(t), c_{put}(t))' = S_t + c_{put}(t)$$

Από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Ειδικότερα στο χρόνο $t = 0$ θα έχουμε ότι $C_{put} = C_{call} + Ke^{-rT} - S_0$.

Στη συνέχεια ας εξετάσουμε δικαιώματα αγοράς Αμερικανικού τύπου. Συμβολίζουμε με $c_{call}^A(t)$ και $c_{put}^A(t)$ την αξία ενός call option και ενός put option (Αμερικανικού τύπου) αντίστοιχα με τα ίδια χαρακτηριστικά (επί του ίδιου τίτλου, με ίδια T, K) στο χρόνο $t \in [0, T]$. Αρχικά παρατηρούμε ότι ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.6.2. Δεν είναι ποτέ συμφέρον να εξασκήσει κάποιος ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου πριν τη λήξη του.

Απόδειξη. Έστω ότι ένας επενδυτής έχει στη κατοχή του ένα long call, Αμερικανικού τύπου, επί μιας μετοχής με τιμή εξάσκησης K και χρόνο λήξης T . Αν αποφασίσει να το εξασκήσει σε χρόνο $\tau < T$, τότε θα έχει κέρδος $S_\tau - K$. Αντίθετα, αν στο ίδιο χρόνο τ πωλήσει ανοιχτά την υποκείμενη μετοχή (στην τιμή S_τ) και κλείσει την ανοιχτή του θέση στον χρόνο T με κόστος $\min\{K, S_T\}$ (είτε ασκεί το δικαίωμα, είτε αγοράζει την μετοχή από την αγορά) τότε θα έχει κέρδος (υπολογισμένο στο χρόνο τ) ίσο με $S_\tau - \min\{K, S_T\} \cdot e^{-r(T-\tau)} > S_\tau - K$.

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει άμεσα η ακόλουθη.

Πρόταση 2.6.3. Η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου είναι ίση με την no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου, δηλαδή $c_{call}^A(t) = c_{call}(t)$, $t \in [0, T]$.

Απόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι οι συναλλασσόμενοι της αγοράς δρουν λογικά και επομένως, με βάση την προηγούμενη πρόταση, όλοι οι κάτοχοι δικαιωμάτων αγοράς Αμερικανικού τύπου δεν θα τα εξασκήσουν πριν το χρόνο λήξης τους. Επομένως ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου πρακτικά ισοδυναμεί με ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου από όπου προκύπτει και το συμπέρασμα της πρότασης.

Αντίθετα με το δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου, η εξάσκηση ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου πριν την ημερομηνία λήξης του μπορεί να αποβεί σε όφελος. Δεν ισχύει δηλαδή η Πρόταση 2.6.3 για δικαιώματα πώλησης Αμερικανικού τύπου. Ένα δικαίωμα Αμερικανικού τύπου δίνει μεγαλύτερη ευελιξία στον κάτοχό του από ένα όμοιο δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου διότι το πρώτο μπορεί να εξασκηθεί σε οποιοδήποτε χρόνο στο $[0, T]$ ενώ το δεύτερο μόνο στο T . Επομένως η τιμή του πρώτου θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη τιμή του δεύτερου. Δηλαδή $c_{put}^A(t) > c_{put}(t)$, $t \in [0, T]$.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Άσκηση 1. Μία επένδυση $A = 100000$ ευρώ αποδίδει μετά από ένα έτος $B = 110000$ ευρώ. Ποιο είναι το αντίστοιχο (α) απλό ετήσιο επιτόκιο, (β) ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο με τριμηνιαίο ανατοκισμό, (γ) ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο με συνεχή ανατοκισμό;

Άσκηση 2. Έστω ένα long forward συμβόλαιο (με τιμή παράδοσης K , χρόνο παράδοσης T) επί ενός τίτλου (με αξία S_t στο χρόνο t) που αποδίδει κάποιο εισόδημα μέχρι την ημέρα παράδοσης. Αν I είναι η παρούσα αξία (στο χρόνο $t = 0$) του εισοδήματος που αποδίδει η κατοχή του υποκείμενου αγαθού, αποδείξτε ότι η no-arbitrage αξία του long forward σε χρόνο $t \in [0, T]$ μετά την σύναψή του είναι

$$f(t) = S_t - I - Ke^{-r(T-t)}.$$

Άσκηση 3. Έστω ένα long forward συμβόλαιο (με τιμή παράδοσης K , χρόνο παράδοσης T) επί ξένου συναλλάγματος, π.χ. 1 δολαρίου, και S_t η αξία ενός δολαρίου (σε ευρώ) στο χρόνο t . Αν

θεωρήσουμε ότι ο κάτοχος δολαρίων μπορεί να τα επενδύσει σε ομόλογα ρήτρας δολαρίου με επιτόκιο r' , αποδείξτε ότι η no-arbitrage αξία του long forward σε χρόνο $t \in [0, T]$ μετά την σύναψη του είναι

$$f(t) = S_t e^{-r'(T-t)} - K e^{-r(T-t)}$$

όπου το επιτόκιο r των ομολόγων της αγοράς αναφέρεται σε ευρώ-ομόλογα. Σε ποια τιμή πρέπει να προκαθοριστεί η τιμή παράδοσης K έτσι ώστε να μην προσφέρεται ευκαιρία για arbitrage (υπενθυμίζεται ότι ένα long forward συμβόλαιο δεν κοστίζει τίποτε κατά τη σύναψή του).

Άσκηση 4. Ένα εξαμηνιαίο long forward συμβόλαιο συνάπτεται επί 1000 μετοχών που δεν αποδίδουν μέρισμα. Την ημέρα της σύναψής του η υποκείμενη μετοχή έχει αξία 50 ευρώ (ανά τεμάχιο) και το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς είναι ίσο με 5% (ετήσιο, με συνεχή ανατοκισμό).
(α) Ποια είναι η αρχική αξία του συμβολαίου και ποια πρέπει να είναι η τιμή παράδοσης K ;
(β) Μετά από τρεις μήνες, η τιμή της μετοχής έχει ανέβει στα 60 ευρώ. Ποιά είναι τώρα η αξία του συμβολαίου;

Άσκηση 5. Έστω ότι σήμερα συνάπτεται ένα τετραμηνιαίο forward συμβόλαιο επί 10.000 μετοχών (σημερινής αξίας 100 ευρώ έκαστη) που δεν αποδίδουν μέρισμα με τιμή παράδοσης $K = 1.020.000$ ευρώ. Αν το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς (με λήξη μετά από τέσσερις μήνες) είναι $r = 10\%$, μπορείτε να περιγράψετε μια στρατηγική που θα σας αποφέρει σίγουρο κέρδος (έχετε τη δυνατότητα να λάβετε long forward ή short forward position). Αν $K = 1.040.000$ ευρώ, μπορείτε να βρείτε και πάλι μια τέτοια στρατηγική;

Άσκηση 6. Η σημερινή αξία μιας μετοχής είναι 50 ευρώ και έστω ότι μετά από δύο μήνες θα είναι είτε 45 είτε 55 ευρώ. Αν το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς είναι $r = 4\%$ (ετήσιο, με συνεχή ανατοκισμό), ποια θα πρέπει να είναι η τιμή ισορροπίας (no-arbitrage) C ενός long call συμβολαίου (Ευρωπαϊκού τύπου) επί της μετοχής αυτής με χρόνο εξάσκησης $T =$ δύο μήνες και τιμή εξάσκησης $K = 48$ ευρώ;

Άσκηση 7. Έστω ότι στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου κάποιο παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν αποδίδει στο χρόνο λήξης του, T , κέρδος που είναι μία συνάρτηση, έστω $g(S_T)$, της τιμής, S_T , του υποκείμενου αγαθού στο χρόνο T . Ποια θα πρέπει να είναι η no-arbitrage αξία του παραγώγου αυτού στο χρόνο 0;

Άσκηση 8. (Γιατί δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι και ένα long put Αμερικανικού τύπου δεν είναι ποτέ συμφέρον να εξασκηθεί πριν τη λήξη του, χρησιμοποιώντας απόδειξη ανάλογη με αυτή που χρησιμοποιήσαμε στα long calls Αμερικανικού τύπου;) Έστω ότι ένας επενδυτής έχει στη κατοχή του ένα long put, Αμερικανικού τύπου, επί μιας μετοχής με τιμή εξάσκησης K και χρόνο λήξης T . Αν αποφασίσει να το εξασκήσει σε χρόνο $\tau < T$, τότε θα έχει κέρδος $K - S_\tau$. Αντίθετα, αν στο ίδιο χρόνο τ αγοράσει την υποκείμενη μετοχή (στην τιμή S_τ) και την πωλήσει στον χρόνο T με κέρδος $\max\{K, S_T\}$ (είτε ασκεί το δικαίωμα, είτε πωλεί τη μετοχή στην αγορά) τότε τι κέρδος θα έχει στο χρόνο τ ; Μπορεί να συγκριθεί με το κέρδος $K - S_\tau$ (μπορούμε να πούμε ότι είναι πάντοτε μεγαλύτερο ή μικρότερο);

Άσκηση 9. Σε μία αγορά που αποτελείται από τους εξής τίτλους: (1): ομόλογο επί μιας χρηματικής μονάδας με επιτόκιο r , (2): μετοχή με αξία S_t στο χρόνο t , (3): long call Αμερικανικού τύπου (με παραμέτρους K, C, T). Θεωρείστε στο χρόνο $t = 0$ τα ακόλουθα χαρτοφυλάκια:

$$A: (Ke^{-rT}, 0, 1) \quad \text{και} \quad B: (0, 1, 0).$$

(α) Έστω ότι το δικαίωμα εξασκείται σε χρόνο $\tau < T$. Ποια θα είναι τότε η αξία, V_τ^A , του χαρτοφυλακίου A;

(β) Δείξτε ότι αν το δικαίωμα εξασκηθεί σε χρόνο $\tau < T$ τότε ισχύει πάντοτε ότι $V_\tau^A < V_\tau^B$ (όπου V_t^A, V_t^B οι αξίες των A, B στο χρόνο t). Ενώ αν το δικαίωμα εξασκηθεί στο χρόνο T τότε θα είναι $V_T^A \geq V_T^B$.

(γ) Δικαιολογείστε γιατί από το (β) προκύπτει ότι ένα American call option πρέπει να έχει την ίδια αξία με ένα European call option.

Άσκηση 10. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 3 του πρώτου κεφαλαίου («ένα *long forward* συμβόλαιο είναι ισοδύναμο με ένα *long call* και ένα *short put* Ευρωπαϊκού τύπου») για να αποδείξετε και πάλι τη σχέση που συνδέει τις τιμές μεταξύ call και put options (put-call parity) Ευρωπαϊκού τύπου.

Άσκηση 11. Έστω ότι σε μία αγορά (με επιτόκια ομολόγων $r = 10\%$) διατίθενται δικαιώματα αγοράς και πώλησης (με $T =$ τρεις μήνες, $K = 65$ ευρώ) επί μιας μετοχής που σήμερα έχει αξία 63 ευρώ. Αν η τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι 3 ευρώ,

(α) ποια θα πρέπει να είναι η no-arbitrage τιμή του δικαιώματος πώλησης;

(β) Αν η τιμή του δικαιώματος πώλησης είναι 4 ευρώ, να περιγράψετε μια στρατηγική που οδηγεί σε σίγουρο κέρδος.

Άσκηση 12. Η σημερινή αξία μιας μετοχής είναι 100 ευρώ και έστω ότι μετά από τρεις μήνες είτε θα αυξηθεί είτε θα μειωθεί κατά 10%. Αν το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς είναι $r = 5\%$ (ετήσιο, με συνεχή ανατοκισμό), ποια θα πρέπει να είναι η τιμή ισορροπίας (no-arbitrage) ενός long call Αμερικανικού τύπου και ενός long put Ευρωπαϊκού τύπου επί της μετοχής αυτής με χρόνο εξάσκησης $T =$ τρεις μήνες και τιμή εξάσκησης $K = 95$ ευρώ;