
1. Βασικές Έννοιες - Προτάσεις Θεωρίας Πιθανοτήτων

Τα διάφορα επιστημονικά μοντέλα ή πειράματα (ή γενικότερα τα φυσικά φαινόμενα) μπορεί να θεωρηθεί ότι εντάσσονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- τα προσδιοριστικά ή **αιτιοκρατικά** (*deterministic*) μοντέλα στα οποία οι γνωστές μεταβλητές (π.χ. αρχικές συνθήκες) αρκούν για την ακριβή πρόβλεψη των αποτελεσμάτων τους,

και

- τα **στοχαστικά** (*stochastic, probabilistic*) μοντέλα στα οποία οι γνωστές μεταβλητές δεν είναι αρκετές για την ακριβή πρόβλεψη των αποτελεσμάτων τους (επηρεάζονται από τον παράγοντα «τύχη»)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

• **Δειγματικός Χώρος** (ή δειγματοχώρος) Ω ($\neq \emptyset$): Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης

Π.χ. $\Omega = \{K, \Gamma\}, \{1,2,3,4,5,6\}, [0,1], R^k$.

• **Ενδεχόμενα του Ω** : Μια «συλλογή» $\mathfrak{F}$ από υποσύνολα του Ω που έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες (σ-άλγεβρα):

(i) $\Omega \in \mathfrak{F}$.

(ii) Αν $A \in \mathfrak{F}$ τότε και $A^c \in \mathfrak{F}$.

(iii) Αν $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ τότε και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$.

Π.χ. αν $\Omega = \{1,2,3\}$ το $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ είναι ένα σύνολο ενδεχομένων.

το $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$ δεν είναι.

- Αν $\mathfrak{F}$ είναι σύνολο ενδεχομένων τότε $\emptyset \in \mathfrak{F}$ και $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$.
- Η *μικρότερη* σ -άλγεβρα είναι η $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ και
Η *μεγαλύτερη* είναι το δυναμοσύνολο $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$ του Ω .
- Αν ο Ω είναι *πεπερασμένο* σύνολο (π.χ. $\{1,2,3\}$) ή *άπειρα αριθμήσιμο* σύνολο (π.χ. $\{0,1,2,\dots\}$) τότε συνήθως ως ενδεχόμενα του Ω θεωρούμε όλα τα υποσύνολα του Ω (δηλαδή $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$).
- Αν ο Ω είναι ο $\mathbf{R}$ ή ο $\mathbf{R}^k$ (ή κάποιο διάστημά του) τότε ως ενδεχομενα του συνήθως θεωρούμε όλα τα υποσύνολά του που «κατασκευάζονται» μέσω *τομών, ενώσεων, συμπληρωμάτων ανοικτών διαστημάτων*^{*}
(^{*} καλούνται σύνολα Borel και είναι «λιγότερα» από το $2^{\mathbf{R}}$).

• Σχέσεις - Πράξεις μεταξύ ενδεχομένων:

$A \acute{\eta} B$	$= A \cup B,$
$A \text{ και } B$	$= A \cap B,$
$\text{Όχι } A$	$= A^c$
$A \text{ και όχι } B$	$= A \setminus B = A \cap B^c$

• Μερικές γνωστές ιδιότητες:

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	<i>αντιμεταθετική ιδιότητα</i>
$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap \Gamma$	$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup \Gamma$	<i>προσεταιριστική ιδιότητα</i>
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$	
$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$	$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$	<i>επιμεριστική ιδιότητα</i>
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	<i>τύποι De Morgan</i>

«Πιθανότητα» σε ένα Δειγματικό Χώρο

- Ιστορικά αναφέρονται 3 «ορισμοί» της έννοιας της πιθανότητας :

(1) **Ορισμός πιθανότητας κατά Von Mises («στατιστικός»)**: η πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου A είναι η οριακή σχετική συχνότητα εμφάνισης του A . Αν πραγματοποιήσουμε το ίδιο πείραμα n φορές και $f_n(A)$ = πλήθος των εμφανίσεων του ενδεχομένου A στα n πειράματα τότε

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(A)}{n}$$

(2) **Ορισμός πιθανότητας κατά Laplace («κλασικός»)**: Αν $|A|$ = πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A τότε

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } A}{\text{Συνολικό πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}}$$

- ο παραπάνω ορισμός προϋποθέτει ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω **είναι ισοπίθανα** και ο Ω πεπερασμένος.

Π.χ. έχουμε την ρίψη ενός ζαριού τότε π.χ. $P(\{1\}) = 1/6$, $P(\{1,3,5\}) = 3/6$.

(3) Αξιοματικός ορισμός πιθανότητας (Kolmogorov):

- Η θεμελίωση που πρότεινε ο Kolmogorov δεν πραγματοποιείται μέσω κάποιου τύπου υπολογισμού της $P(A)$ αλλά περιγράφοντας τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μία συνολοσυνάρτηση ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως «πιθανότητα».

Μία συνολοσυνάρτηση P από το $\mathfrak{F} \rightarrow [0, \infty)$ η οποία απεικονίζει κάθε ενδεχόμενο A στο $P(A) \in [0, \infty)$ θα καλείται «πιθανότητα» αν ισχύουν

(1) $P(\Omega) = 1$.

(2) *Εάν $A_1, A_2, \dots$ είναι μία ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω τότε*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- Η τριάδα $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ καλείται και χώρος πιθανότητας.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το παράδειγμα της ρίψης ενός ζαριού με $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- Αν θεωρήσουμε ότι ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα τότε

$$P(\Omega)=P(\{1,2,3,4,5,6\})=1 \quad \text{και} \quad P(\Omega) = P(\{1,2,3,4,5,6\}) = P(\bigcup_{i=1}^6 \{i\}) = \sum_{i=1}^6 P(\{i\}) = 6p$$

Άρα $p = 1/6$, δηλαδή όσο θα προέκυπτε και με τον κλασικό ορισμό (Laplace).

• Είναι εύκολο να αποδειχθεί γενικότερα ότι *αν ο Ω είναι πεπερασμένος και αποτελείται από ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα τότε*, από τα αξιώματα Kolmogorov,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

• Επομένως ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας αποτελεί απλή συνέπεια των αξιωμάτων Kolmogorov όταν ο Ω είναι πεπερασμένος με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα.

• Και ο ορισμός της πιθανότητας κατά Von Mises προκύπτει από τα αξιώματα Kolmogorov και μάλιστα από τον γνωστό ως νόμο των μεγάλων αριθμών.

• Επομένως στη συνέχεια θα θεωρήσουμε μόνο τον αξιωματικό ορισμό.

Βασικές ιδιότητες των πιθανοτήτων.

• Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε

$$(1) P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$(2) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$(3) P(\emptyset) = 0$$

$$(4) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$(5) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(6) P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \text{ (ανισότητα Boole ή ιδιότητα υποπροσθετικότητας)}$$

$$(7) P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1 = 1 - P(A^c) - P(B^c) \text{ (ανισότητα Bonferroni)}$$

$$(8) \text{ Αν } B \subseteq A \text{ τότε } P(B) \leq P(A). \text{ (μονοτονία της πιθανότητας)}$$

• Οι ιδιότητες (5), (6) και (7) μπορούν να γενικευτούν για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Π.χ. (τύπος Poincare ή κανόνας εγκλεισμού - αποκλεισμού)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Έστω $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ένα σύνολο με n στοιχεία.

- **ΔΙΑΤΑΞΗ των n στοιχείων ανά k :** Μια διατεταγμένη k -άδα $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ η οποία αποτελείται από k ($\leq n$) διαφορετικά στοιχεία του B
- **Μετάθεση n στοιχείων:** μία διάταξη των n στοιχείων ανά n .

Παράδειγμα. Οι δυνατές διατάξεις των 3 γραμμάτων $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ανά δύο είναι οι εξής

$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta)$

ενώ οι δυνατές μεταθέσεις των 3 γραμμάτων $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι

$(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha, \gamma, \beta), (\beta, \alpha, \gamma), (\beta, \gamma, \alpha), (\gamma, \alpha, \beta), (\gamma, \beta, \alpha).$

Το πλήθος των διατάξεων των n ανά k είναι $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \equiv (n)_k$

Το πλήθος των μεταθέσεων n στοιχείων είναι ίσο με $n(n-1)\dots 2 \cdot 1 \equiv n!$

- **ΔΙΑΤΑΞΗ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ των v στοιχείων ανά k :** Μια διατεταγμένη k -άδα $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ η οποία αποτελείται από k στοιχεία του B .

Παράδειγμα Οι δυνατές διατάξεις των 4 γραμμάτων $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ανά 2 με επανάληψη είναι οι εξής:

$(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\beta, \alpha), (\beta, \beta), (\beta, \gamma), (\beta, \delta), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma), (\gamma, \delta), (\delta, \alpha), (\delta, \beta), (\delta, \gamma), (\delta, \delta)$

Το πλήθος των διατάξεων των v ανά k με επανάληψη είναι ίσο με

$$v^k.$$

- **ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ των v στοιχείων ανά k :** Μια k -άδα $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ η οποία αποτελείται από k διαφορετικά στοιχεία του B

Παράδειγμα. Οι δυνατοί συνδυασμοί των 4 γραμμάτων $\{a, \beta, \gamma, \delta\}$ ανά δύο είναι $\{a, \beta\}, \{a, \gamma\}, \{a, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\}, \{\gamma, \delta\}$.

*Το πλήθος των συνδυασμών των v ανά k είναι ίσο με**

$$\binom{v}{k} = \frac{(v)_k}{k!} = \frac{v!}{k!(v-k)!}$$

(* σε κάθε συνδυασμό αντιστοιχούν $k!$ Διατάξεις)

- **ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ** των v στοιχείων ανά k : Μια k -άδα $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ η οποία αποτελείται από k στοιχεία του B

Παράδειγμα Οι δυνατοί συνδυασμοί των 4 γραμμάτων $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ανά 2 με επανάληψη:
 $\{\alpha, \alpha\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}, \{\beta, \beta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\}, \{\gamma, \gamma\}, \{\gamma, \delta\}, \{\delta, \delta\}$

Το πλήθος των συνδυασμών των v στοιχείων ανά k με επανάληψη είναι ίσο με

$$\binom{v+k-1}{k}$$

Συνοψίζοντας θα έχουμε τον επόμενο πίνακα

	οι k - άδες αποτελούνται από:	πλήθος :
<i>Διατάξεις n ανά k</i>	διατεταγμένα, διαφορετικά στοιχεία	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
<i>Διατάξεις n ανά k με επανάληψη</i>	διατεταγμένα, όχι απαραίτητα διαφορετικά στοιχεία	n^k
<i>Συνδυασμοί n ανά k</i>	μη διατεταγμένα, διαφορετικά στοιχεία	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
<i>Συνδυασμοί n ανά k με επανάληψη</i>	μη διατεταγμένα, όχι απαραίτητα διαφορετικά στοιχεία	$\binom{n+k-1}{k}$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός του $n!$ μέσω του τύπου του Stirling.

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ Ή ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

• Έστω δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(B) > 0$. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A δεδομένου ότι έχει (ή ότι θα) πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B ορίζεται

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Η $P(A|B)$ καλείται και δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B .

Παράδειγμα. Μία οικογένεια έχει δύο παιδιά. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα δύο αγόρια δεδομένου ότι τουλάχιστον ένα από αυτά είναι αγόρι;

Εδώ $\Omega = \{(a,a), (a,k), (k,a), (k,k)\}$ και θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A = \{\text{και τα δύο παιδιά είναι αγόρια}\} = \{(a,a)\}$$

$$B = \{\text{τουλάχιστον ένα από τα παιδιά είναι αγόρι}\} = \{(a,a), (a,k), (k,a)\}$$

Ζητείται η

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(a,a)\})}{P(\{(a,a), (a,k), (k,a)\})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

- Για συγκεκριμένο (σταθερό) B η συνολοσυνάρτηση $P(\cdot | B)$ η οποία απεικονίζει κάθε ενδεχόμενο A του Ω στο $P(A|B)$ ικανοποιεί τα αξιώματα Kolmogorov και άρα είναι πιθανότητα.

- Συνεπώς ισχύουν και για τη δεσμευμένη πιθανότητα όλα τα θεωρήματα και οι ιδιότητες που ισχύουν για πιθανότητες. :

$$(1) P(A^C|C) = 1 - P(A|C)$$

$$(2) 0 \leq P(A|C) \leq 1$$

$$(3) P(\emptyset|C) = 0$$

$$(4) P(A-B|C) = P(A|C) - P(AB|C)$$

$$(5) P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

$$(6) P(A \cup B|C) \leq P(A|C) + P(B|C) \text{ (ανισότητα Boole για δεσμευμένες πιθανότητες)}$$

$$(7) P(A \cap B|C) \geq P(A|C) + P(B|C) - 1 \text{ (ανισότητα Bonferroni για δεσμευμένες πιθ.)}$$

$$(8) \text{ Αν } B \subseteq A \text{ τότε } P(B|C) \leq P(A|C) \text{ (μονοτονία της δεσμευμένης πιθανότητας)}$$

- Δεν ισχύει το ίδιο και για τη συνάρτηση $P(A | \cdot)$ (για σταθερό A). Δηλαδή γενικά δεν ισχύουν εκφράσεις της μορφής $P(A | B \cup \Gamma) = P(A | B) + P(A | \Gamma) - P(A | B \cap \Gamma)$ κ.ο.κ.

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

- Δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω θα καλούνται (στοχαστικά) ανεξάρτητα αν ισχύει ότι

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- Σε αυτή την περίπτωση : $P(A|B) = P(A)$.

- Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots, A_n$ θα καλούνται στοχαστικά ανεξάρτητα αν

$$P(A_{a_1} \cap A_{a_2} \cap \dots \cap A_{a_k}) = P(A_{a_1})P(A_{a_2}) \dots P(A_{a_k}),$$

για κάθε k (διαφορετικούς) δείκτες $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ και για κάθε $k = 2, 3, \dots, n$.

- Π.χ. για να είναι 4 ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3, A_4 ανεξάρτητα θα πρέπει η παραπάνω ισότητα να ισχύει για κάθε δύο, για κάθε τρία και για κάθε τέσσερα (διαφορετικά) A_i .

(για να είναι n ενδεχόμενα στοχαστικά ανεξάρτητα, δεν αρκεί να είναι ανά δύο ανεξάρτητα).

- **Πολλαπλασιαστικός κανόνας για την πιθανότητα τομής ενδεχομένων:** Αν $A_1, A_2, \dots, A_k$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \\ = P(A_k | A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})P(A_{k-1} | A_1 \cap \dots \cap A_{k-2}) \dots P(A_3 | A_1 \cap A_2)P(A_2 | A_1)P(A_1)$$

- **Παράδειγμα.** Τραβάμε τρία χαρτιά (χωρίς επανάθεση) από μια τράπουλα με 52 χαρτιά. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε 3 άσσους.

Έστω ότι επιλέγουμε ένα-ένα τα τρία χαρτιά και έστω $A_i = \{i \text{ χαρτί άσσο}\}$, $i = 1, 2, 3$. Θα ισχύει ότι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{4}{52} \frac{3}{51} \frac{2}{50} = \frac{1}{5525}.$$

(τα παραπάνω ενδεχόμενα δεν είναι ανεξάρτητα)

ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ - ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΒΑΥΕΣ

- Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ ξένα ανά δύο ενδεχόμενα του Ω και $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$. Τότε

$$P(B) = P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + \dots + P(B | A_n)P(A_n).$$

και

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + \dots + P(B | A_n)P(A_n)}, i = 1, 2, \dots, k.$$

Για κάθε ενδεχόμενο B του Ω

Απόδειξη. (α) Τα ενδεχόμενα $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_n$ είναι ξένα ανά δύο. Επομένως, από τα αξιώματα Kolmogorov,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n)) = P((B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n)) \\ &= P(B \cap A_1) + \dots + P(B \cap A_n) = P(B | A_1)P(A_1) + \dots + P(B | A_n)P(A_n). \end{aligned}$$

(β) Προκύπτει από το $P(A_i | B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{P(B)}$ και το (α).

Παράδειγμα. Όταν κάποιος παίρνει λεωφορείο για τη δουλειά του πηγαίνει καθυστερημένος στο 30% των περιπτώσεων και όταν παίρνει ταξί πηγαίνει καθυστερημένος στο 10% των περιπτώσεων. Προτιμά λεωφορείο στο 80% και ταξί στο 20% των περιπτώσεων.

(α) Ποια η πιθανότητα να πάει καθυστερημένος στη δουλειά του μια ημέρα;

(β) Αν μία ημέρα πήγε καθυστερημένος στη δουλειά του, ποια η πιθανότητα να πήγε με λεωφορείο;

Λύση. Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα

K: καθυστερημένος, Λ: παίρνει λεωφορείο, T: παίρνει ταξί.

Η πιθανότητα να πάει καθυστερημένος στη δουλειά του μια ημέρα είναι

$$P(K) = P(K | \Lambda)P(\Lambda) + P(K | T)P(T) = 0.3 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.26$$

Η πιθανότητα να πήγε με λεωφορείο δεδομένου ότι πήγε καθυστερημένος είναι

$$P(\Lambda | K) = \frac{P(K | \Lambda)P(\Lambda)}{P(K)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.26} = 0.92 .$$