

Κεφάλαιο 4: Ελέγχοι υποθέσεων

Γ. Ψαρράκος

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Στατιστική II

22 Μαΐου 2013

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε στατιστικούς ελέγχους κάτω από τους οποίους θα **αποφασίζουμε** διαθέτοντας ένα τ.δ. αν μια παράμετρος (πχ μέση τιμή ή ποσοστό) παίρνει μία τιμή ή όχι. Εδώ δεν μας ενδιαφέρει η αριθμητική παρουσίαση ορισμένων αποτελεσμάτων κατά τη μελέτη της συμπεριφοράς ενός φαινομένου, αλλά η διερεύνηση το κατά πόσο το συγκεκριμένο φαινόμενο επαληθεύει μια **δεδομένη υποθετική υπόθεση**. Οί τεχνικές αυτές είναι γνωστές ως μη παραμετρικές μέθοδοι.

Για παράδειγμα, αν μ_0 είναι το μέσο εισόδημα των ευρωπαίων πολιτών (εκτός Ελλάδας), θέλουμε να ελέγξουμε αν το μέσο εισόδημα των Ελλήνων μ είναι κοντά στο μ_0 ή όχι. Ο έλεγχος είναι

(μηδενική υπόθεση) $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Εδώ δεν μας ενδιαφέρει η αριθμητική τιμή του μ του εισοδήματος των Ελλήνων, αλλά το αν είναι κοντά στον αντίστοιχο ευρωπαϊκό μέσο όρο μ_0 .



$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{έναντι} \quad H_1 : \begin{cases} \theta \neq \theta_0 & (\theta > \theta_0 \text{ ή } \theta < \theta_0) \\ \theta > \theta_0 \\ \theta < \theta_0 \end{cases}$$

Ο πρώτος έλεγχος ονομάζεται δίπλευρος, ενώ οι επόμενοι δύο είναι μονόπλευροι.

Οι δύο πιθανές αποφάσεις σε έναν στατιστικό έλεγχο είναι

- ▶ Αποδοχή της υπόθεσης 0 (H_0)
- ▶ Απόρριψη της υπόθεσης 0 (H_0) με συνέπεια την αποδοχή της εναλλακτικής υπόθεσης (H_1).

Οι 4 πιθανές καταστάσεις ενός στατιστικού ελέγχου παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

	Υποθετική κατάσταση	
Απόφαση	H_0 αληθής	H_0 ψευδής
Αποδοχή H_0	Απόφαση σωστή Πιθανότητα = $1 - \alpha$	Σφάλμα τύπου II Πιθανότητα = β
Απόρριψη της H_0	Σφάλμα τύπου I Πιθανότητα = α	Απόφαση σωστή Πιθανότητα = $1 - \beta$

Το σφάλμα τύπου I, δηλ. το α , ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας

$$\alpha = Pr(I) = Pr(\text{απόρριψη της } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής})$$

Επιπλέον

$$1 - \alpha = Pr(\text{αποδοχή της } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής})$$

	Υποθετική κατάσταση	
Απόφαση	H_0 αληθής	H_0 ψευδής
Αποδοχή H_0	Απόφαση σωστή Πιθανότητα = $1 - \alpha$	Σφάλμα τύπου II Πιθανότητα = β
Απόρριψη της H_0	Σφάλμα τύπου I Πιθανότητα = α	Απόφαση σωστή Πιθανότητα = $1 - \beta$

Ακόμα το σφάλμα τύπου II, δηλ. το β , είναι

$$\beta = Pr(II) = Pr(\text{αποδοχή της } H_0 \mid H_0 \text{ ψευδής}).$$

Επιπλέον,

$$1 - \beta = Pr(\text{απόρριψη της } H_0 \mid H_0 \text{ ψευδής}).$$

και ονομάζεται δύναμη (power) του στατιστικού ελέγχου.

Σχήματα για τον δίπλευρο έλεγχο

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

και τους μονόπλευρους ελέγχους

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta < \theta_0,$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta > \theta_0.$$

Έλεγχος μέσης τιμής όταν η διασπορά είναι γνωστή

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ένα τ.δ. από έναν κανονικό πληθυσμό με μέση τιμή μ και γνωστή διασπορά σ^2 . Θέλουμε να κάνουμε το δίπλευρο έλεγχο

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ έναντι } H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

με επίπεδο σημαντικότητας α . Η εφαρμογή του ελέγχου βασίζεται στην τυπική κανονική τ.μ.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής τότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Επομένως, η H_0 είναι αποδεκτή για επίπεδο σημαντικότητας α αν ισχύει

$$-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2} \quad \text{ή} \quad |Z| \leq |z_{\alpha/2}|$$

όπου $z_{\alpha/2}$ η κριτική τιμή η οποία βρίσκεται από τους στατιστικούς πίνακες.

Αν βρούμε από τους πίνακες ότι $|Z| \leq |z_{\alpha/2}|$ δεχόμαστε την μηδενική υπόθεση H_0 , αλλιώς αν $|Z| > |z_{\alpha/2}|$ απορρίπτουμε την H_0 .

Σημαντική Παρατήρηση: Αν στη σχέση $-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}$ αντικαταστήσουμε το $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$ προκύπτει το γνωστό για εμάς δ.ε. για το μέσο $\mu = \mu_0$ του πληθυσμού κάτω από την μηδενική υπόθεση

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Αν ο στατιστικός έλεγχος είναι μονόπλευρος,

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ έναντι } H_1 : \mu < \mu_0 ,$$

τότε η H_0 γίνεται δεκτή (διαφορετικά απορρίπτεται) αν

$$Z \geq -z_\alpha \text{ (ή ισοδύναμα } \mu_0 \leq \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

ενώ αν έχουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ έναντι } H_1 : \mu > \mu_0 ,$$

τότε η H_0 γίνεται δεκτή (διαφορετικά απορρίπτεται) αν

$$Z \leq z_\alpha \text{ (ή ισοδύναμα } \mu_0 \geq \bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

Έλεγχος μέσης τιμής όταν η διασπορά είναι άγνωστη

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ένα τ.δ. από έναν κανονικό πληθυσμό με μέση τιμή μ και άγνωστη διασπορά σ^2 . Θέλουμε να κάνουμε το δίπλευρο έλεγχο

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{έναντι} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

με επίπεδο σημαντικότητας α . Η εφαρμογή του ελέγχου βασίζεται στην τυχαία μεταβλητή t που ακολουθεί την κατανομή t με $(n - 1)$ βαθμούς ελευθερίας.

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής τότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

Επομένως, η H_0 είναι αποδεκτή για επίπεδο σημαντικότητας α αν ισχύει

$$-t_{\alpha/2, n-1} \leq t \leq t_{\alpha/2, n-1} \quad \text{ή} \quad |t| \leq |t_{\alpha/2, n-1}|$$

όπου $t_{\alpha/2, n-1}$ η κριτική τιμή η οποία βρίσκεται από τους στατιστικούς πίνακες.

Αν βρούμε από τους πίνακες ότι $|t| \leq |t_{\alpha/2, n-1}|$ δεχόμαστε την μηδενική υπόθεση H_0 , αλλιώς αν $|t| > |t_{\alpha/2, n-1}|$ απορρίπτουμε την H_0 .

Σημαντική Παρατήρηση: Αν στη σχέση

$-t_{\alpha/2, n-1} \leq t \leq t_{\alpha/2, n-1}$ αντικαταστήσουμε το $t = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$ προκύπτει το γνωστό για εμάς δ.ε. για το μέσο $\mu = \mu_0$ του πληθυσμού κάτω από την μηδενική υπόθεση

$$\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Αν ο στατιστικός έλεγχος είναι μονόπλευρος,

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ έναντι } H_1 : \mu < \mu_0 ,$$

τότε η H_0 γίνεται δεκτή (διαφορετικά απορρίπτεται) αν

$$t \geq -t_{\alpha, n-1} \text{ (ή ισοδύναμα } \mu_0 \leq \bar{X} + t_{\alpha, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}})$$

ενώ αν έχουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ έναντι } H_1 : \mu > \mu_0 ,$$

τότε η H_0 γίνεται δεκτή (διαφορετικά απορρίπτεται) αν

$$t \leq t_{\alpha, n-1} \text{ (ή ισοδύναμα } \mu_0 \geq \bar{X} - t_{\alpha, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}).$$

Θεωρούμε ένα τ.δ. από έναν κανονικό πληθυσμό με μέση τιμή μ (άγνωστη) και διασπορά σ^2 (άγνωστη). Θέλουμε να ελέγξουμε

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ έναντι } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \text{ (δίπλευρος).}$$

Η εφαρμογή του ελέγχου βασίζεται στην τυχαία μεταβλητή χ^2 που ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $(n - 1)$ βαθμούς ελευθερίας.

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής τότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Επομένως, η H_0 είναι αποδεκτή για επίπεδο σημαντικότητας α αν ισχύει

$$\chi^2_{1-\alpha/2, n-1} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha/2, n-1},$$

όπου $\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}$ και $\chi^2_{\alpha/2, n-1}$ είναι οι κριτικές τιμές που βρίσκονται από τους στατιστικούς πίνακες.

Αν βρούμε από τους πίνακες ότι $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2, n-1}$ ή $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2, n-1}$ απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0 και δεχόμαστε την εναλλακτική H_1 .

Αν ο στατιστικός έλεγχος είναι μονόπλευρος,

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \text{ έναντι } H_1 : \sigma < \sigma_0 ,$$

τότε η H_0 γίνεται δεκτή (διαφορετικά απορρίπτεται) αν

$$\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha, n-1}^2 ,$$

ενώ αν έχουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \text{ έναντι } H_1 : \sigma > \sigma_0 ,$$

τότε η H_0 γίνεται δεκτή (διαφορετικά απορρίπτεται) αν

$$\chi^2 \leq \chi_{\alpha, n-1}^2 .$$

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ένα τ.δ. από την $B(1, p)$, με συνάρτηση πιθανότητας

$$Pr(X_i = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

Θυμίζουμε ότι $\mu = E(X_i) = p$ και $\sigma^2 = Var(X_i) = p(1 - p)$.
Ακόμα ο δειγματικός μέσος

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

έχει μέση τιμή $E(\bar{X}) = p$ και διασπορά $Var(\bar{X}) = p(1 - p)/n$.

Θέλουμε να κάνουμε το δίπλευρο έλεγχο

$$H_0 : p = p_0 \text{ έναντι } H_1 : p \neq p_0,$$

με επίπεδο σημαντικότητας α . Για $n \geq 30$ και κάνοντας χρήση του ΚΟΘ, η εφαρμογή του ελέγχου βασίζεται στην τυπική κανονική τ.μ.

$$Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1).$$

Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής τότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$Z = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0, 1).$$

Επομένως, η H_0 είναι αποδεκτή για επίπεδο σημαντικότητας α αν ισχύει

$$-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2} \quad \text{ή} \quad |Z| \leq |z_{\alpha/2}|$$

όπου $z_{\alpha/2}$ η κριτική τιμή η οποία βρίσκεται από τους στατιστικούς πίνακες.

Αν ο στατιστικός έλεγχος είναι μονόπλευρος,

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{έναντι} \quad H_1 : p < p_0 ,$$

τότε η H_0 γίνεται δεκτή (διαφορετικά απορρίπτεται) αν

$$Z \geq -z_{\alpha}$$

ενώ αν έχουμε τον έλεγχο

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{έναντι} \quad H_1 : p > p_0 ,$$

τότε η H_0 γίνεται δεκτή (διαφορετικά απορρίπτεται) αν

$$Z \leq z_{\alpha}.$$

Τ. Παπαιωάννου και Λούκας Σ.Β. Εισαγωγή στη Στατιστική, 2002.

Χ.Κ. Αγιακλόγλου και Θ.Ε. Μπένος. Εισαγωγή στην Οικονομετρική Ανάλυση, 2003.

Γ. Ηλιόπουλος. Βασικές Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων, 2006.

Χ.Κ. Φράγκος. Στατιστική Επιχειρήσεων, 1998.

Δ.Α. Ιωαννίδης. Στατιστικές Μέθοδοι, 1999.

Μ. Μπούτσικας. Στατιστική ΙΙ, Σημειώσεις 2003.