Κεφάλαιο 3: Μέθοδοι εκτίμησης και διαστήματα εμπιστοσύνης

Γ. Ψαρράκος

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης

Στατιστική ΙΙ

10 Απριλίου 2013

Μέδοδοι εκτίμησης

Θα μελετήσουμε δύο μεθόδους εύρεσης εκτιτημητών από ένα τ.δ., που ονομάζονται

1. Μέθοδος των ροπών.
2. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας.

Μέθοδος των ροπών

Διαδικασία μεθόδου: Έστω ένα τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από μία κατανομή με ασκ $F(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ και ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τις k παραμέτρους $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ (από το τ.δ.). Εξισώνουμε τις k-πρώτες δειγματικές ροπές

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = \frac{X_1^k + X_2^k + \ldots + X_n^k}{n}$$

με τις ροπές του πληθυσμού $\mu_k = E(X^k)$, όπου $X \sim F$. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε ένα σύστημα k εξισώσεων με k αγνώστους $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ το οποίο λύνουμε.

Το $k \times k$ σύστημα είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i &= E(X) \\
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 &= E(X^2) \\
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3 &= E(X^3) \\
&\vdots \\
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k &= E(X^k).
\end{aligned}
$$

Πρόταση

Η δειγματική ροπή m_k είναι συνεπής εκτιμητής της πληθυσμιακής ροπής μ_k.

Απόδειξη

Πράγματι

$$E(m_k) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \frac{1}{n}\, n\mu_k = \mu_k.$$

και

$$\begin{aligned} Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i^k) = \frac{1}{n^2}\, nVar(X_i^k) \\ &= \frac{Var(X_i^k)}{n} \to 0, \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Μέθοδος μεγιστης πιθανοφάνειας

Διαδικασία μεθόδου για μία παράμετρο θ: Έστω ένα τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από μία κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ) $f(x;\theta)$ και ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το θ (από το τ.δ.).

Βήμα 1: Βρίσκουμε την από κοινού σππ των $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ως συνάρτηση του θ:

$$L(\theta) := L(\theta \,|\, X_1, X_2, \ldots, X_n) = f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \theta)$$

Η συνάρτηση $L(\theta)$ ονομάζεται **συνάρτηση πιθανοφάνειας**.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τη συνάρτηση $\ln L(\theta)$.

Βήμα 3: Βρίσκουμε την τιμή του θ για την οποία μεγιστοποιείται η $\ln L(\theta)$, συμβολίζουμε με $\hat{\theta}$ (για την ίδια τιμή του θ μεγιστοποιείται το $L(\theta)$),

$$\frac{d}{d\theta}(\ln L(\theta)) = 0, \quad \text{και} \quad \frac{d^2}{d\theta^2}(\ln L(\hat{\theta})) < 0.$$

Βήμα 4: Η τιμή του θ που βρίσκουμε στο Βήμα 3 ονομάζεται **εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (ε.μ.π.)** και συμβ. με $\hat{\theta}$.

Με παρόμοιο τρόπο δουλεύουμε όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε περισσότερες από μία παραμέτρους. Συγκεκριμένα το Βήμα 3 γίνεται

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Big(\ln L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)\Big) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial\theta_2}\Big(\ln L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)\Big) &= 0\\
&\vdots\\
\frac{\partial}{\partial\theta_k}\Big(\ln L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)\Big) &= 0,
\end{aligned}$$

από το οποίο δημιουργείται ένα $k \times k$ σύστημα ως προς $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$, το οποίο σε πολλές περιπτώσεις δεν λύνεται με αναλυτικό τρόπο. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε συνήθως αριθμητικές μεθόδους. Ακόμα πρέπει

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_j{}^2}(\ln L(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_k)) < 0, \;\; j = 1,2,\ldots,k.$$

Διαστήματα εμπιστοσύνης

Μέχρι τώρα μελετήσαμε σημειακούς εκτιμητές πχ $\overline{X}$, S^2 κτλ. Στην συνέχεια, δοθέντος ενός τ.δ. θα κατασκευάσουμε διαστήματα για την παράμετρο θ που θέλουμε να εκτιμήσουμε της μορφής

$$L \leq \theta \leq U$$

με βαθμό εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$ ($\alpha = 10$ ή 5 ή 2.5 %). Αυτό σημαίνει ότι

$$Pr(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha$$

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε τα παρακάτω δεδομένα

$$7, 6, 0, 8, -9, -4, 0, 1, -9, 1, 2, 7, 0, 6, -6, -5, -1, 6, -2, 4$$

τα οποία προέρχονται από την Κανονική$(\mu, 25)$. Να κατασκευαστεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής μ.

Γενικά έχουμε δει ένας πολύ καλός εκτιμητής για το μ είναι ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$. Ακόμα, γνωρίζουμε ότι $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, άρα

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \sim \quad N(0, 1).$$

Τότε

$$Pr\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

ή

$$Pr\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}-\mu \leq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

ή

$$Pr\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha.$$

Στο παραδειγμά μας είναι

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{1}{20}[7+6+0+8+(-9)+(-4)+0+1+(-9)+1+2+7\\ &\quad +0+6+(-6)+(-5)+(-1)+6+(-2)+4]=0.6\end{aligned}$$

$$z_{0.025}=1.96, \quad \sigma=5, \quad n=20.$$

Τα όρια εμπιστοσύνης είναι

$$L=\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.6-1.96\frac{5}{\sqrt{20}}=-1.59$$

και

$$U=\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.6+1.96\frac{5}{\sqrt{20}}=2.79$$

Το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης είνα $[-1.59\,,\,2.79]$

Διαστήματα εμπιστοσύνης για το μέσο μ της κανονικής κατανομής όταν η διασπορά σ^2 είναι γνωστή

Στην προηγούμενη παράγραφο κατασκευάσαμε ένα δ.ε. για τη μέση τιμή μ μιας κανονικής κατανομής όταν η διασπορά είναι γνωστή. Συγκεκριμένα δείξαμε ότι

$$Pr\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

δηλαδή ένα $(1-\alpha)\%$ δ.ε. της μέσης τιμής μ είναι

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Θυμίζουμε ότι ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ αποτελεί έναν πολύ καλό εκτιμητή για το μέσο μ (βλέπε μεθοδο ροπών και ε.μ.π.)

Διαστήματα εμπιστοσύνης για το μέσο μ της κανονικής κατανομής όταν η διασπορά σ^2 είναι άγνωστη

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε ένα δ.ε. για το μ της κανονικής κατανομής όταν το σ^2 είναι άγνωστο. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τ.δ. δείγμα μεγέθους n από έναν κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$. Τότε

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

όπου t_{n-1} η κατανομή t (student) με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας. Θυμίζουμε ακόμα ότι η δειγματική διασπορά S^2 δίνεται από την σχέση

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

Συνεπώς, για να κατασκευάσουμε ένα $(1-\alpha)\%$ δ.ε. εργαζόμαστε ως εξής

$$Pr\left(-t_{\alpha/2,n-1} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2,n-1} \right) = 1-\alpha$$

και λύνοντας ως προς μ προκύπτει ότι

$$Pr\left(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

δηλαδή ένα ένα $(1-\alpha)\%$ δ.ε. της μέσης τιμής μ είναι

$$\left[\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \right].$$

Σημαντική Παρατήρηση: Αν το δείγμα είναι αρκετά μεγάλο ($n > 30$) το δ.ε.

$$\left[\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\,,\,\overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

προσεγγίζεται (αυτό οφείλεται στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) με το

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\,,\,\overline{X} + z_{\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

Επιπλέον, για μεγάλο n (πάλι λόγω ΚΟΘ) το τελευταίο δ.ε. μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε και για **μη κανονικούς πληθυσμούς**.

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε τα παρακάτω δεδομένα

$$73, 81, 84, 77, 71, 75, 71, 76, 63, 69, 85, 77, 71, 81, 71, 76, 79, 68, 72, 71$$

τα οποία προέρχονται από την Κανονική(μ, σ^2). Να κατασκευαστεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής μ, όταν η διασπορά είναι (i) $\sigma^2 = 25$, (ii) άγνωστη.

(i) Το ζητούμενο δ.ε. για το μέσο είναι

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[\overline{X} - z_{0.025}\,\frac{5}{\sqrt{20}}\,,\ \overline{X} + z_{0.025}\,\frac{5}{\sqrt{20}}\right],$$

όπου

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{20}(73 + 81 + \ldots + 72 + 71) = 74.55$$

και από τους στατιστικούς πίνακες $z_{0.025} = 1.96$. Το δ.ε. είναι

$$\left[74.55 - 1.96\,\frac{5}{\sqrt{20}}\,,\ 74.55 + 1.96\,\frac{5}{\sqrt{20}}\right] = [72.36\,,\ 76.74].$$

(ii) Το ζητούμενο δ.ε. για το μέσο είναι

$$\left[\overline{X} - t_{0.025,19}\,\frac{S}{\sqrt{20}}\,,\ \overline{X} + t_{0.025,19}\,\frac{S}{\sqrt{20}}\right],$$

όπου $\overline{X} = 74.55$ και

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \\ &= \frac{1}{19}\Big[(73-74.55)^2 + (81-74.55)^2 + \ldots \\ &\quad +(72-74.55)^2 + (71-74.55)^2\Big] = 31.42. \end{aligned}$$

Από τους στατιστικούς πίνακες βρίσκουμε $t_{0.025,19} = 2.093$.
Επομένως, το δ.ε. είναι

$$\left[74.55 - 2.093\,\frac{\sqrt{31.42}}{\sqrt{20}}\,,\ 74.55 + 2.093\,\frac{\sqrt{31.42}}{\sqrt{20}}\right] = [71.92\,,\ 77.17]$$

Παράδειγμα 1: Μη κανονικός πληθυσμός (μεγάλο δείγμα)

Το πλήθος των ζημιών που έχει μία ασφαλιστική εταιρεία ανά εβδομάδα ακολουθεί την Poisson με παράμετρο λ. Μετά από 40 εβδομάδες παρατηρήθηκαν τα παρακάτω δεδομένα (ζημιές ανά εβδομάδα)

$$3, 8, 6, 7, 4, 5, 6, 6, 1, 3, 9, 4, 1, 1, 5, 7, 8, 8, 7, 6, 3, 3, 9, 4, 5, 6, 7,$$
$$6, 8, 3, 10, 5, 6, 6, 7, 5, 4, 9, 1, 5, 6, 2, 6$$

Να βρείτε ένα (προσεγγιστικό) 95% δ.ε. για το λ.

Για την κατανομή Poisson είναι $\mu = \sigma^2 = \lambda$.
Ακόμα

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{40}(3 + 8 + \ldots + 6) = \frac{231}{40}$$

Το δ.ε. (αφού $n > 30$) είναι

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\,\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\,,\,\overline{X} + z_{\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

ή

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sqrt{\overline{X}}}{\sqrt{n}}\,,\,\overline{X} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sqrt{\overline{X}}}{\sqrt{n}}\right]$$

ή

$$\left[\frac{231}{40} - 1.96\,\frac{\sqrt{231/40}}{\sqrt{40}}\,,\,\frac{231}{40} + 1.96\,\frac{\sqrt{231/40}}{\sqrt{40}}\right] = [5.84\,,\,7.16].$$

Παράδειγμα 2: Μη κανονικός πληθυσμός (μεγάλο δείγμα)

Από τους 112 ψηφοφόρους μιας περιοχής οι 49 είναι υπέρ του υποψηφίου Α. Να κατασκευαστεί ένα δ.ε. 95% για το ποσοστό των ψηφοφόρων του Α.

Συμμετρικό διαστήμα εμπιστοσύνης για τη διασπορά σ^2 ενός κανονικού πληθυσμού

Αν έχουμε ένα τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τότε γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Τότε ένα $(1-\alpha)\%$ συμμετρικό δ.ε. για τη διασπορά σ^2 είναι

$$Pr\left(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha.$$

Λύνοντας ως προς το σ^2 έχουμε

$$Pr\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right) = 1-\alpha.$$

Επομένως το ζητούμενο δ.ε. είναι

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right] = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right].$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που γνωρίζουμε τη μέση τιμή του πληθυσμού μ, τότε στις πράξεις μας χρησιμοποιούμε το μ αντί του $\overline{X}$. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύται ότι

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2_n,$$

οπότε το δ.ε. για τη διασπορά γίνεται

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2,n}}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n}}\right].$$

Συμμετρικό διαστήμα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων μ_1 και μ_2 δύο κανονικών πληθυσμών, όταν σ_1^2 σ_2^2 είναι γνωστές

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ δύο τ.δ. από τους κανονικούς πληθυσμούς $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Τότε

$$\overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}) \text{ και } \overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

και οι τ.μ. $\overline{X}$, $\overline{Y}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες διότι προέρχονται από ανεξάρτητα δείγματα. Επιπλέον, μία σημειακή εκτίμηση για το $\mu_1 - \mu_2$ είναι (η τ.μ.) $\overline{X} - \overline{Y}$ με

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(E(\overline{X} - \overline{Y}), Var(\overline{X} - \overline{Y})),$$

όπου

$$E(\overline{X} - \overline{Y}) = E(\overline{X}) - E(\overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2$$

και

$$\begin{aligned} Var(\overline{X} - \overline{Y}) &= Var[\overline{X} + (-\overline{Y})] \\ &= Var(\overline{X}) + Var(-\overline{Y}) \\ &= Var(\overline{X}) + (-1)^2 Var(\overline{Y})) \\ &= Var(\overline{X}) + Var(\overline{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}, \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία μεταξύ των $\overline{X}$ και $\overline{Y}$.

Επομένως,

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}),$$

και ένα $(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ (όταν σ_1^2 και σ_2^2 είναι γνωστά) είναι

$$\left[\overline{X} - \overline{Y} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \overline{X} - \overline{Y} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

Παράδειγμα: Ένα τ.δ. 15 παρατηρήσεων από έναν πληθυσμό $N(\mu_1, 60)$ έδωσε $\overline{X} = 70.1$, και ένα άλλο ανεξάρτητο από το πρώτο με 8 παρατηρήσεις από $N(\mu_2, 40)$ έδωσε $\overline{Y}$=75.3. Να βρείτε ένα δ.ε. 90% για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$.

Λύση: Το ζητούμενο δ.ε. με $z_{a/2} = z_{0.05} = 1.645$ είναι

$$\left[\overline{X} - \overline{Y} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,,\ \overline{X} - \overline{Y} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

ή

$$\left[70.1 - 75.3 - 1.645\sqrt{\frac{60}{15} + \frac{40}{8}}\,,\ 70.1 - 75.3 + 1.645\sqrt{\frac{60}{15} + \frac{40}{8}}\right]$$
$$= [-10.135\,,\ -0.265].$$

Συμμετρικό διαστήμα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων μ_1 και μ_2 δύο κανονικών πληθυσμών, όταν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ άγνωστο

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ δύο τ.δ. από τους κανονικούς πληθυσμούς $N(\mu_1, \sigma^2)$ και $N(\mu_2, \sigma^2)$. Τότε το δ.ε. για τη διαδορά $\mu_1 - \mu_2$ είναι

$$\left[\overline{X} - \overline{Y} - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\, S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\,,\ \overline{X} - \overline{Y} + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\, S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right],$$

όπου

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

η ισοσταθμισμένη δειγματική διασπορά των δειγματικών διασπορών S_1^2, S_2^2 στα δύο τ.δ.

Απόδειξη, περιληπτικά: Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1-1} \text{ και } \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2-1}.$$

Άρα

$$\frac{\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}}}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2(n_1+n_2-2)}}} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{n_1+n_2-2}}} = t_{n_1+n_2-2}$$

και χρησιμοποιούμε τη στατιστική συνάρτηση

$$T = \frac{\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

και επιθυμούμε

$Pr(-t_{\alpha/2,n_1+n_2-2} \leq T \leq t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}) = 1-\alpha$ (Λύνουμε ως προς $\mu_1 - \mu$

Παράδειγμα Να βρεθεί ένα 90% δ.ε. για τη διαφορά των μέσων επιδόσεων στο μάθημα Α μεταξύ δύο διαδοχικών ετών, εάν η επίδοση ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu_1, \sigma^2)$ (για το πρώτο έτος) και $N(\mu_2, \sigma^2)$ (για το δεύτερο έτος), και διαθέτουμε τα παρακάτω δύο τ.δ. δείγματα (ένα για κάθε έτος)

$$\text{πρώτο έτος } 4, 6, 8, 2 \text{ και δεύτερο έτος } 3, 6, 7$$

Λύση Οι δειγματικοί μέσοι είναι

$$\overline{X} = \frac{4+6+8+2}{4} = 5 \text{ και } \overline{Y} = \frac{3+6+7}{3} = 5.33$$

Οι δειγματκές διασπορές είναι

$$S_1^2 = \frac{1}{4-1}[(4-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2+(2-5)^2] = \frac{1}{3}(1+1+9+9) = \frac{20}{3}$$

$$S_2^2 = \frac{1}{3-1}[(3-5.33)^2+(6-5.33)^2+(7-5.33)^2] = \frac{8.67}{2}$$

Η ισοσταθμισμένη δειγματική διασπορά (και από τα δύο δείγματα) είναι

$$S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{20+8.67}{5} = 5.734$$

Το 90% δ.ε. για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ είναι

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\, S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,,\ \overline{X}-\overline{Y}+t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\, S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right],$$

ή

$$\left[5-5.33-t_{0.05,5}\,2.395\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}\,,\ 5-5.33+t_{0.05,5}\,2.395\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}\right],$$

Από τους στατιστικούς πίνακες είναι $t_{0.05,5} = 2.015$.
Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$[-4.01586\,,\ 3.35586].$$

Τ. Παπαιωάννου και Λούκας Σ.Β. Εισαγωγή στη Στατιστική, 2002.

Χ.Κ. Αγιακλόγλου και Θ.Ε. Μπένος. Εισαγωγή στην Οικονομετρική Ανάλυση, 2003.

Γ. Ηλιόπουλος. Βασικές Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων, 2006.

Χ.Κ. Φράγκος. Στατιστική Επιχειρήσεων, 1998.

Δ.Α. Ιωαννίδης. Στατιστικές Μέθοδοι, 1999.

Μ. Μπούτσικας. Στατιστική ΙΙΙ, Σημειώσεις 2003.