ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

10η ΔΙΑΛΕΞΗ

10.1 Παράδειγμα: Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\}$ k διανύσματα (στοιχεία) διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbf{R}$. Εξετάζω αν το σύνολο που γεννιέται από αυτά

$$< v_1, \ldots, v_k > := \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}\}.$$

αποτελεί γραμμικό υπόχωρο του ευρύτερου χώρου V. Χρησιμοποιώ για το σκοπό αυτό το κριτήριο [?]. Δύο τυχαία στοιχεία u_1 και u_2 του πιο πάνω χώρου θα είναι υποχρεωτικά της μορφής

$$u_1 = \lambda_{1,1}v_1 + \lambda_{1,2}v_2 + \cdots + \lambda_{1,k}v_k \quad \text{και} \quad u_2 = \lambda_{2,1}v_1 + \lambda_{2,2}v_2 + \cdots + \lambda_{2,k}v_k.$$

Είναι φανερό ότι ο τυχαίος γραμμικός συνδυασμός τους, $\lambda u_1 + \mu u_2$, θα είναι

$$\begin{aligned}
\lambda u_1 + \mu u_2 &= \lambda(\lambda_{1,1}v_1 + \lambda_{1,2}v_2 + \cdots + \lambda_{1,k}v_k) + \mu(\lambda_{2,1}v_1 + \lambda_{2,2}v_2 + \cdots + \lambda_{2,k}v_k) \\
&= \lambda\lambda_{1,1}v_1 + \lambda\lambda_{1,2}v_2 + \cdots + \lambda\lambda_{1,k}v_k + \mu\lambda_{2,1}v_1 + \mu\lambda_{2,2}v_2 + \cdots + \mu\lambda_{2,k}v_k \\
&= (\lambda\lambda_{1,1} + \mu\lambda_{2,1})v_1 + (\lambda\lambda_{1,2} + \mu\lambda_{2,2})v_2 + \cdots + (\lambda\lambda_{1,k} + \mu\lambda_{2,k})v_k
\end{aligned}$$

της ίδιας μορφής και άρα θα ανήκει στο σύνολο $< v_1, \ldots, v_k >$. Το $\mathbf{0}$ όπως έχουμε δει [?] μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός οποιονδήποτε διανυσμάτων, άρα και των $v_1, \ldots, v_k$, συνεπώς $\mathbf{0} \in < v_1, \ldots, v_k >$ και άρα $< v_1, \ldots, v_k > \neq \emptyset$. Το κριτήριο τώρα εφαρμόζεται και ο $< v_1, \ldots, v_k >$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Συμπέρασμα: Μπορούμε στο εξής να μιλούμε για το <u>χώρο</u> που γεννιέται από τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k$ και όχι απλά για το <u>σύνολο</u> που γεννιέται από αυτά.

10.2 Υπενθύμιση παρατήρησης [?]: Από την παρατήρηση [?] το $\mathbf{0}$ γράφεται <u>πάντα</u> ως γραμμικός συνδυασμός οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων, δηλαδή $\mathbf{0} \in < v_1, \ldots, v_k >$. Αυτό γίνεται με

με μοναδικό τρόπο	$\Leftrightarrow$	τα $< v_1, \ldots, v_k >$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα
με άπειρους τρόπους	$\Leftrightarrow$	τα $< v_1, \ldots, v_k >$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

Η πιο κάτω πρόταση λεει ότι αυτό που συμβαίνει με το $\mathbf{0}$ δεν είναι ιδιότητα του μηδενικού διανύσματος αλλά αποτέλεσμα της γραμμικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας των γεννητόρων.

10.3 Πρόταση: Το $\mathbf{0}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_k$ αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του $< v_1, \ldots, v_k >$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_k$.

Απόδειξη: Το αντίστροφο είναι προφανές αφού αν κάθε στοιχείο του $< v_1, \ldots, v_k >$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο, αυτό θα ισχύει και για το $\mathbf{0}$.

Το ευθύ ($\Rightarrow$): Έστω ότι υπάρχει κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα $v \in < v_1, \ldots, v_k >$ που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_k$ με παραπάνω από ένα τρόπους,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_j v_j + \cdots + \lambda_k v_k = v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_j v_j + \cdots + \mu_k v_k.$$

Υποχρεωτικά υπάρχει $1 \leq j \leq k$ ώστε $\lambda_j \neq \mu_j$. Αλλά τότε

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_j - \mu_j)v_j + \cdots + (\lambda_k - \mu_k)v_k = \mathbf{0}$$

με $\lambda_j - \mu_j \neq 0$. Αυτή όμως είναι μια επιπλέον γραφή, εκτός της γνωστής όπου όλοι οι συντελεστές είναι μηδενικοί, του $\mathbf{0}$, άρα άτοπο.

10.4 Παρατήρηση-Ορισμός: Αν τα $v_1, \ldots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε κάθε στοιχείο του $v \in < v_1, \ldots, v_k >$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_j v_j + \cdots + \lambda_k v_k = v.$$

Με δεδομένη την επιλογή των $v_1, \ldots, v_k$, οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ είναι μοναδικοί, πρόταση [?], και εξαρτώνται μόνο από το v. Θα λέγονται **συντεταγμένες** του v ως προς τα $v_1, \ldots, v_k$.

10.5 Ορισμός: Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbf{R}$.

1. Ο V θα λέγεται **πεπερασμένος** αν και μόνο αν γεννάται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του, δηλ. αν και μόνο αν $V =< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ για κάποια $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. Τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ θα λέγονται **γεννήτορες** του V.

2. **Βάση** διανυσματικού χώρου V θα λέμε κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων που τον παράγει.

10.6 Παρατήρηση-Παράδειγμα: Γίνεται προφανές από τους ορισμούς ότι είναι δυνατό να έχουμε πολλά σύνολα γεννητόρων του ίδιου διανυσματικού χώρου αλλά και πολλές βάσεις. Για παράδειγμα, αν $V = \mathbf{R}^2$ με τις συνήθεις πράξεις, έχουμε δει ότι

$$V = \mathbf{R}^2 =< (1,0), (0,1) >=< (1,0), (0,1), (x,y) >=< (2,0), (1,1) >,$$

για οποιαδήποτε $x, y \in \mathbf{R}$.

10.7 Ορισμός: Έστω $(V, +, \cdot)$ πεπερασμένος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbf{R}$. Το πλήθος, m, των στοιχείων μιας βάσης του είναι αριθμός μοναδικός, χαρακτηρίζει τον διανυσματικό χώρο και καλείται **διάσταση** αυτού. Για τον αριθμό αυτό θα γράφουμε, $\dim_{\mathbf{R}}(V)$.

Στο παράδειγμα 10.6, τόσο το $\{(1,0), (0,1)\}$ όσο και το $\{(2,0), (1,1)\}$ αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου επί του $\mathbf{R}$ και άρα η διάσταση του είναι $\dim_{\mathbf{R}} = 2$.

10.8 Παράδειγμα: Έστω

$$\mathcal{M}_{2\times 3} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R} \right\}$$

ο διανυσματικός χώρος των 2×3 πραγματικών πινάκων επί του $\mathbf{R}$. Έστω, επιπλέον, το σύνολο

$$\Big\{ e_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\}.$$

Παρατηρούμε ότι

- Τα $\{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}, e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2,3}\}$ γεννούν το χώρο καθώς

$$ae_{1,1} + be_{1,2} + ce_{1,3} + de_{2,1} + ee_{2,2} + fe_{2,3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

- Επίσης, τα $\{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}, e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2,3}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού

$$ae_{1,1} + be_{1,2} + ce_{1,3} + de_{2,1} + ee_{2,2} + fe_{2,3} = \mathbf{0}$$

  συνεπάγεται ότι

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; a = b = c = d = e = f = 0\,.$$

Άρα τα $\{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}, e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2,3}\}$ αποτελούν βάση του $\mathcal{M}_{2\times 3}$ επί του $\mathbf{R}$ και η διάσταση αυτού είναι $\dim_{\mathbf{R}} = 6$.

10.9 Γενικεύοντας το παράδειγμα 10.8, παρατηρούμε ότι τα διανύσματα

$$\{e_{1,1}, \ldots, e_{1,m}, e_{2,1}, \ldots e_{2,m}, \ldots, e_{n,1}, \ldots, e_{n,m}\}$$

όπου $e_{i,j}$ συμβολίζει ένα $(n \times m)$-πραγματικό πίνακα με μηδενικά σε κάθε θέση εκτός από την (i,j)-θέση όπου έχει 1 αποτελεί βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου όλων των $(n \times m)$ πινάκων, $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbf{R})$ και άρα

$$\dim_{\mathbf{R}}(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbf{R})) = nm\,.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες ενός $n \times m$-πραγματικού πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix},$$

ως προς την προηγούμενη βάση είναι αντίστοιχα οι αριθμοί $\{a_{1,1}, \ldots, a_{n,m}\}$ καθώς προκύπτει από την

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} = a_{1,1}e_{1,1} + a_{1,2}e_{1,2} + \cdots + a_{n,m}e_{n,m}\,.$$

Μια τέτοια βάση θα λέγεται **κανονική**.

10.10 Άσκηση: *Έστω τα διανύσματα του* $\mathbf{R}^3$ $\{(1,2,0), (-1,0,1)\}$. *Να βρεθεί βάση που να τα περιέχει.*

Πρώτα εξετάζω αν τα πιο πάνω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αν δηλαδή, δεν είναι συνευθειακά.

$$\lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(-1,0,1) = (0,0,0) \rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1, \lambda) = (0,0,0)\,,$$

από το οποίο συνάγεται ότι υποχρεωτικά $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ο χώρος που γεννούν, $< (1,2,0), (-1,0,1) >$, θα είναι κατά συνέπεια δισδιάστατος, ένα επίπεδο μέσα στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbf{R}^3$. Προκειμένου να παραγάγουμε τον $\mathbf{R}^3$ χρειαζόμαστε ένα τρίτο, μη-μηδενικό διάνυσμα με μόνη ιδιότητα να μην είναι συνεπίπεδο με τα δύο άλλα. Όλα τα συνεπίπεδα με τα $(1,2,0),(-1,0,1)$ διανύσματα δίνονται από

$$< (1,2,0),(-1,0,1) >= \{x(1,2,0)+y(-1,0,1)=(x-y,2x,y)\,\text{όπου}\, x,y\in\mathbf{R}\}\,.$$

Αρκεί λοιπόν να επιλέξω, για παράδειγμα, το διάνυσμα $(1,4,0)$.

10.11 Παράδειγμα-Παρατήρηση: Έστω το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων

$$\mathbf{R}[X] := \{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0\,, 0\neq a_n, a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\in\mathbf{R}\}\,.$$

Είναι γνωστό ότι το πιο πάνω σύνολο έχει τη δομή διανυσματικού χώρου επί του $\mathbf{R}$ με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης πολυωνύμων και του εξωτερικού πολλαπλασιασμού. Θεωρούμε το σύνολο των μονώνυμων της μορφής

$$C := \{1 = X^0, X, \ldots, X^n, \ldots\}\,.$$

Προφανώς οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος μονώνυμων του C είναι γραμμικά ανεξάρτητο καθώς

$$\lambda_0X^0 + \lambda_1X_1 + \cdots + \lambda_{m-1}X^{m-1} + \lambda_mX^m \equiv 0 \Rightarrow \lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{m-1}=\lambda_m=0\,,$$

όπου m είναι ο μέγιστος των βαθμών των πολυωνύμων επιλογής. Ωστόσο, όσο μεγάλο και να είναι το m το μονώνυμο X^{m+1} δεν ανήκει στο χώρο που γεννούν τα $\{X^0, X_1, \ldots, X^{m-1}, X^m\}$. Παρατηρούμε ότι ο $\mathbf{R}[X]$ περιέχει άπειρα γραμμικά ανεξάρτητων πολυώνυμα, για παράδειγμα όλα τα μονώνυμα του C και άρα **??** η διάσταση του $\mathbf{R}[X]$ είναι άπειρη.