ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

9η ΔΙΑΛΕΞΗ

9.1 Ορισμός: Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\}$ k διανύσματα (στοιχεία) διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbf{R}$. Το σύνολο όλων των πιθανών γραμμικών συνδυασμών τους θα λέγεται το σύνολο το γενόμενο ή παραγόμενο από αυτά και θα συμβολίζεται $< v_1, \ldots, v_k >$. Δηλαδή,

$$< v_1, \ldots, v_k >:= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}\}.$$

Τα $\{v_1, \ldots, v_k\}$ θα λέγονται γεννήτορες του πιο πάνω χώρου.

9.2 Παραδείγματα:

1. $< (4,1), (-1,2) >= \mathbf{R}^2$ καθώς προκύπτει από το παράδειγμα [?] και τα $\{(4,1), (-1,2)\}$ αποτελούν γεννήτορες του $\mathbf{R}^2$.

2. Το παράδειγμα [?] μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\Big\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big\rangle = \Big\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ 3\lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_1 \pi \end{pmatrix} \Big\}.$$

3. Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα [?], μπορεί κανείς να δει ότι

$$\Big\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

$$= \Big\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big\rangle.$$

9.3 Παρατήρηση: Από το τρίτο παράδειγμα των [?] παρατηρεί κανείς ότι ο ίδιος χώρος είναι δυνατό να παραχθεί και από λιγότερους γεννήτορες. Δηλαδή τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

γεννούν το ίδιο ακριβώς σύνολο με τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Όπως είδαμε στο ερώτημα 3 του παραδείγματος [?] κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβεί με τα διανύσματα $\{(4,1), (-1,2)\}$.

Τα διανύσματα $\{(4,1), (-1,2)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ενώ τα

$$\Big\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big\}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ενδεχομένως λοιπόν αυτή να είναι η αιτία του πιο πάνω φαινομένου.

Πράγματι, όπως θα δείξει η πρόταση [?] που ακολουθεί σε ότι αφορά στο γενόμενο χώρο τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα είναι όλα απαραίτητα ενώ ανάμεσα σε γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα υπάρχουν «περιττά».

9.4 Πρόταση: Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\}$ k μη μηδενικά διανύσματα (στοιχεία) διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbf{R}$. Τα $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν κάποιο από αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Επειδή τα $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα υπάρχει $\lambda_j \neq 0$ και τέτοιο ώστε

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_j v_j + \cdots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}.$$

Αλλά τότε

$$\lambda_j v_j = -\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_k v_k \quad \text{και καθώς } \lambda_j \neq 0 \quad v_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k.$$

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, αν κάποιο $v_i \neq \mathbf{0}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τότε

$$v_i = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_l v_l + \cdots + \mu_k v_k$$

και καθώς $v_i \neq \mathbf{0}$ κάποιο από τα μ_i έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το $\mu_l \neq 0$. Δηλαδή

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_l v_l + \cdots + \mu_k v_k - v_i = \mathbf{0}$$

χωρίς να είναι υποχρεωτικά όλοι οι συντελεστές 0, δηλαδή, τα $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

9.5 Παράδειγμα: Όπως είδαμε [?] τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένα. Εύκολα, βλέπει κανείς ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Συμπέρασμα: Ως προς τους γενόμενους από διανύσματα «χώρους»

«γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα»	:	είναι όλα απαραίτητα
«γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα»	:	μπορούμε να κάνουμε και με λιγότερα

9.6 Ορισμός: Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbf{R}$ και $\emptyset \neq W \subseteq V$. Το W θα λέγεται διανυσματικός υπόχωρος του V αν και μόνον αν $(W, +, \cdot)$ με πράξεις «$+$» και «$\cdot$» όπως αυτές κληρονομούνται από το μεγάλο χώρο V, αποτελεί αυτόνομο διανυσματικό χώρο επί του $\mathbf{R}$.
Θα γράφουμε $W \leq V$.

9.7 Παραδείγματα: Με κατευθείαν επαλήθευση των οκτώ ιδιοτήτων του ορισμού [?], βλέπουμε ότι το υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$, W, που γεννιέται από το διάνυσμα $(4,1)$

$$W =< (4,1) >= \{\lambda(4,1) \,|\, \lambda \in \mathbf{R}\} = \{(4\lambda, \lambda) \,|\, \lambda \in \mathbf{R}\}$$

εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbf{R}^2$.

Για την αποφυγή της επίπονης διαδικασίας του κατευθείαν ελέγχου των οκτώ ιδιοτήτων του ορισμού [?] όταν θέλουμε να εξετάσουμε αν ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου αποτελεί διανυσματικό υπόχωρό του χρησιμοποιούμε το πιο κάτω κριτήριο.

9.8 Πρόταση (Κριτήριο): Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbf{R}$ και $\emptyset \neq W \subseteq V$. Το W θα λέγεται διανυσματικός υπόχωρος του V αν και μόνον αν ο τυχαίος γραμμικός συνδυασμός δύο στοιχείων του W ανήκει στον W, δηλαδή, αν και μόνον αν

$$w_1, w_2 \in W \;\Rightarrow\; \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W \text{ για όλα } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$

Απόδειξη: Το αντίστροφο είναι προφανές. Για το ευθύ παρατηρεί κανείς ότι το $\mathbf{0}$ του διανυσματικού χώρου υποχρεωτικά ανήκει στο W καθώς το $W \neq \emptyset$ περιέχει κάποιο στοιχείο w οπότε

$$W \ni \mathbf{0} = 0 \cdot w.$$

Η ίδια λογική μπορεί να εφαρμοστεί για να δείξει κανείς ότι το W περιέχει τα αντίστροφα των στοιχείων του αφού

$$w \in W \;\Rightarrow\; -w = (-1) \cdot w \in W.$$

Στη συνέχεια, η επαλήθευση των οκτώ ιδιοτήτων του ορισμού [?] είναι άμεση καθώς τα στοιχεία του W ανήκουν εξ' ορισμού στον διανυσματικό χώρο V και η «κληρονομικότητα» εξασφαλίζει ότι οι πράξεις της πρόσθεσης και του εξωτερικού πολλαπλασιασμού είναι επί της ουσίας οι ίδιες.

9.9 Παράδειγμα: Έστω $(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$ ο χώρος με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Έστω, επίσης,

$$W := \{(x, y, z) \,|\, 2x + 3y + 4z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3.$$

Είναι το W διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$ (προφανώς με πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού όπως αυτοί ορίζονται στον ευρύτερο χώρο $\mathbf{R}^3$);
Προκειμένου να απαντήσω στο ερώτημα εφαρμόζω το κριτήριο [?]. Καθώς

$$\mathbf{0} \in W \text{ αφού } 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = \mathbf{0},\; W \neq \emptyset.$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξω ότι ο τυχαίος γραμμικός συνδυασμός δύο οποιονδήποτε στοιχείων του W ανήκει επίσης στον W. Έστω (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) δύο διανύσματα του W. Εξ' ορισμού γνωρίζω γι αυτά ότι

$$2x_1 + 3y_1 + 4z_1 = 0 \text{ και } 2x_2 + 3y_2 + 4z_2 = 0. \tag{9.9.1}$$

Οπότε,

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2).$$

Από τις [?] προκύπτει ότι

$$\lambda(2x_1 + 3y_1 + 4z_1) = \lambda 0 = 0 \text{ και } \mu(2x_2 + 3y_2 + 4z_2) = \mu 0 = 0,$$

δηλαδή,

$$2\lambda x_1 + 3\lambda y_1 + 4\lambda z_1 = 0 \text{ και } 2\mu x_2 + 3\mu y_2 + 4\mu z_2 = 0$$

και με κατά μέλη πρόσθεση,

$2(\lambda x_1 + \mu x_2) + 3(\lambda y_1 + \mu y_2) + 4(\lambda z_1 + \mu z_2) = 0$ δηλαδή, $\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) \in W$.

Άρα $W \leq \mathbf{R}^3$.