ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

8η ΔΙΑΛΕΞΗ

8.1 Παράδειγμα: Θεωρούμε το κλασικό παράδειγμα του $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ και δύο διανύσματα του επιπέδου $v_1 = (4, 1)$ και $v_2 = (-1, 2)$.

Ερώτημα 1: Έστω τρίτο διάνυσμα του επιπέδου, $(7, 2)$. Είναι δυνατό να βρεθούν κατάλληλα λ_1, λ_2 ώστε

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1(4, 1) + \lambda_2(-1, 2) = (7, 2);$$

Με άλλα λόγια μπορεί το τρίτο αυτό διάνυσμα να «παραχθεί γραμμικά» από τα v_1 και v_2; Είναι το $(7, 2)$ *γραμμικός συνδυασμός* των $(4, 1)$ και $(-1, 2)$;

$$\lambda_1(4, 1) + \lambda_2(-1, 2) = (4\lambda_1, 1\lambda_1) + (-1\lambda_2, 2\lambda_2) = (4\lambda_1 - 1\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) = (7, 2).$$

Οπότε η απάντηση στο ερώτημα μας ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος αναδεικνύοντας άλλη μια φορά τον κυρίαρχο ρόλο των συστημάτων στη μελέτη ερωτημάτων γραμμικής άλγεβρας.

$$\left\{ \begin{array}{c} 4\lambda_1 - \lambda_2 = 7 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \\ 4\lambda_1 - \lambda_2 = 7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \\ 0 - 9\lambda_2 = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 = \frac{16}{9} \\ \lambda_2 = \frac{1}{9} \end{array} \right\}$$

Συμπέρασμα: Το $(7, 2)$ γράφεται ως *γραμμικός συνδυασμός* των διανυσμάτων $(4, 1)$ και $(-1, 2)$.

Παρατήρηση: Η επιλυσιμότητα του συστήματος <u>δεν</u> εξαρτάται από το $(7, 2)$ αλλά από τα $(4, 1)$ και $(-1, 2)$ αφού μόνο αυτά συμμετέχουν στον πίνακα του πιο πάνω συστήματος,

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι αντιστρέψιμος εξασφαλίζοντας λύση στο σύστημα και μάλιστα μοναδική.

Ερώτημα 2: Τι συμβαίνει αν στη θέση του $(7, 2)$ θέσω το τυχαίο διάνυσμα $(a, b) \in \mathbf{R}^2$;

Το ερώτημα έχει ήδη απαντηθεί με την πιο πάνω παρατήρηση, ωστόσο ας το επαληθεύσουμε ανεξάρτητα.

$$\lambda_1(4, 1) + \lambda_2(-1, 2) = (4\lambda_1, 1\lambda_1) + (-1\lambda_2, 2\lambda_2) = (4\lambda_1 - 1\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) = (a, b),$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 4\lambda_1 - \lambda_2 = a \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = b \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + 2\lambda_2 = b \\ 4\lambda_1 - \lambda_2 = a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + 2\lambda_2 = b \\ 0 - 9\lambda_2 = a - 4b \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 = \frac{2a+b}{9} \\ \lambda_2 = \frac{4b-a}{9} \end{array} \right\}.$$

Συμπέρασμα: Το τυχαίο διάνυσμα $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $(4, 1)$ και $(-1, 2)$. Δηλαδή, τα διανύσματα $(4, 1)$ και $(-1, 2)$ «παράγουν» γραμμικά όλο το διανυσματικό χώρο $\mathbf{R}^2$.

Ερώτημα 3: Μπορώ να χρησιμοποιήσω λιγότερα από δύο διανύσματα για να παραγάγω όλο τον $\mathbf{R}^2$; Μπορώ για παράδειγμα να χρησιμοποιήσω το ένα από τα πιο πάνω διανύσματα;

Αν για παράδειγμα περιοριστώ στο $(4, 1)$ παρατηρώ ότι το $(-1, 2)$ δεν μπορεί να παραχθεί, να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός, του $(4, 1)$ μόνο καθώς

$$(-1, 2) = \lambda(4, 1) = (4\lambda, \lambda) \;\Rightarrow\; \lambda = -1/4 \text{ και } \lambda = 2, \text{ άτοπο.}$$

Τα διανύσματα που παράγονται από το $(4,1)$ είναι όλη η ευθεία που φέρει το $(4,1)$, δηλαδή όλα τα διανύσματα της μορφής $\{(4\lambda, \lambda)\}$ και το $(-1,2)$ δεν είναι ένα από αυτά καθώς τα δύο αυτά διανύσματα δεν είναι <u>*συγγραμμικά*</u>. Δύο τέτοια διανύσματα λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα.

Συμπέρασμα: Το γεγονός ότι ένα από τα $\{(4,1),(-1,2)\}$ δεν φθάνει για να παραγάγει το χώρο αλλά τα δύο μαζί αρκούν, θα δούμε ότι σημαίνει ότι τα $\{(4,1),(-1,2)\}$ αποτελούν βάση του χώρου ενώ το πλήθος τους, 2, είναι η διάσταση του χώρου.

8.2 Παράδειγμα: Το σύνολο των 2×3 πραγματικών πινάκων, $M_{2\times 3}(\mathbf{R})$, αποτελεί διανυσματικό χώρο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του εξωτερικού πολλαπλασιασμού πινάκων. Επιλέγουμε τρεις συγκεκριμένους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{και} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε όλους τους πίνακες που είναι δυνατό να γραφούν ως γραμμικός συνδυασμός των πιο πάνω τριών πινάκων

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ 3\lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_1 \pi \end{pmatrix}$$

Είναι προφανές ότι υπάρχουν πίνακες οι οποίοι δεν είναι της πιο πάνω μορφής όπως για παράδειγμα ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ο οποίος στη δεύτερη θέση της πρώτης γραμμής έχει $1 \neq 0$. Εξάγεται το συμπέρασμα ότι οι τρεις πιο πάνω πίνακες δεν μπορούν να παραγάγουν όλο το χώρο $M_{2\times 3}(\mathbf{R})$.

8.3 Παρατήρηση: Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\}$ k διανύσματα (στοιχεία) διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbf{R}$. Είναι φανερό ότι το $\mathbf{0}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των πιο πάνω τυχαία επιλεγμένων διανυσμάτων καθώς

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_k = \mathbf{0}.$$

8.4 Παράδειγμα: Το σύνολο των 2×2 πραγματικών πινάκων εφοδιασμένο με τη συνήθη πρόσθεση και εξωτερικό πολλαπλασιασμό αποτελεί διανυσματικό χώρο επί του $\mathbf{R}$. Έστω τα πιο κάτω στοιχεία του συνόλου αυτού,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από την παρατήρηση [?] προκύπτει ότι το $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των πιο πάνω διανυσμάτων (με χρήση μηδενικών συντελεστών). Είναι ωστόσο αυτός ο τρόπος μοναδικός;

Η απάντηση ανάγεται πάλι στην επίλυση του γραμμικού συστήματος που προκύπτει

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_4 & \lambda_4+\lambda_5 \\ \lambda_5 & \lambda_2+\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_4 & + & \lambda_5 & = & 0 \\ & & & & & & & & \lambda_5 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & & & = & 0 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & & & \lambda_4 & & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_5 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Άρα δεν έχω μοναδική λύση αλλά άπειρες αφού μπορώ να επιλέξω αυθαίρετα οποιονδήποτε από τους $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και να λύσω ως προς τους άλλους δύο. Τέτοια διανύσματα όπως τα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

θα λέγονται γραμμικά εξαρτημένα.

8.5 Ορισμός: Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\}$ k διανύσματα (στοιχεία) διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbf{R}$. Αυτά θα λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα αν το $\mathbf{0}$ γράφεται κατά **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους, δηλαδή αν

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση τα $\{v_1, \ldots, v_k\}$ θα λέγονται γραμμικά εξαρτημένα.

8.6 Παρατήρηση: Όπως είδαμε από την παρατήρηση [?] το $\mathbf{0}$ γράφεται πάντα ως γραμμικός συνδυασμός οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων. Αυτό γίνεται με

με μοναδικό τρόπο $\Leftrightarrow$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα
με περισσότερους του ενός τρόπους $\Leftrightarrow$ γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα

8.7 Παράδειγμα: Αντίθετα με το παράδειγμα [?] όπου έχουμε γραμμική εξάρτηση, τα διανύσματα $(4,1), (-1,2) \in \mathbf{R}^2$ είναι όπως προκύπτει από την παρατήρηση [?] γραμμικά ανεξάρτητα. Από την ίδια παρατήρηση επίσης φαίνεται να υπάρχει σχέση ανάμεσα στην αντιστρεψιμότητα του πίνακα με στοιχεία τις συντεταγμένες των διανυσμάτων και την γραμμική ανεξαρτησία τους.