ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

7η ΔΙΑΛΕΞΗ

7.1 Παράδειγμα: Επιστρέφουμε στο απλούστερο παράδειγμα εκκίνησης αυτής της σειράς διαλέξεων, αυτό του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο μεταβλητές,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & 4 \\ 4x & + & 2y & = & 8 \end{array} \right\}. \tag{7.1.1}$$

Το σύστημα αυτό εναλλακτικά γράφεται στη «γλώσσα» των πινάκων με τη μορφή

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Μπορεί όμως να γραφεί, λίγο διαφορετικά, και στη μορφή

$$x \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{7.1.2}$$

Συμπεραίνουμε ότι η λύση του συστήματος 7.1.1, δηλαδή η εύρεση των πραγματικών αριθμών x, y, ισοδυναμεί με την εύρεση «καταλλήλων ποσοτήτων», x, y, από τα «διανύσματα», ή τους 2×1 πίνακες,

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα, ώστε το άθροισμα τους, ο «συνδυασμός» τους 7.1.2, να κάνει

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Αποκαλώντας τους 2×1 πίνακες «διανύσματα» και την εξίσωση 7.1.2 γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων, βλέπουμε ότι γραμμικά συστήματα και εξισώσεις γραμμικών συνδυασμών βρίσκονται σε αμφίδρομη αντιστοιχία.

$$\boxed{\{\text{συστήματα γραμμικών εξισώσεων}\} \Longleftrightarrow \{\text{γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων}\}}$$

Δίνουμε νόημα στις οντότητες «διανύσματα» και στο τι σημαίνει «γραμμικός συνδυασμός» τους.

7.2 Ορισμός: Ένα μη κενό σύνολο $(V, +, \cdot)$ εφοδιασμένο με πράξεις, πρόσθεση «$+$» και «βαθμωτό» πολλαπλασιασμό «$\cdot$» που ικανοποιεί τις πιο κάτω ιδιότητες θα λέγεται **διανυσματικός χώρος επί του $\mathbf{R}$**.

- Αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$A + B = B + A, \forall\, A, B \in V$$

- Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \; \forall\, A, B, C \in V$$

- Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου:

$$\exists\, 0 \in V \text{ ώστε } 0 + A = A + 0 = A, \; \forall\, A \in V$$

- Ύπαρξη αντιστρόφου στοιχείου:

$$\forall\, A \in V, \; \exists(-A) \in V, \text{ ώστε } A + (-A) = (-A) + A = 0$$

- Επιμεριστική ιδιότητα ως προς τον «βαθμωτό» πολλαπλασιασμό:

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B, \; \forall\, A, B \in V, \lambda \in \mathbf{R}$$

- Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση:

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A, \; \forall\, A \in V, \lambda\mu \in \mathbf{R}$$

- Προσεταιριστική ως προς τον «βαθμωτό» πολλαπλασιασμό ιδιότητα:

$$(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A), \; \forall\, A \in V, \lambda\mu \in \mathbf{R}$$

- $1 \cdot A = A, \; \forall\, A \in V.$

7.3 Ιδιότητες:

- $0 \cdot v = 0$, για κάθε $v \in V$.
- $\lambda \cdot 0 = 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$.
- $(-1) \cdot v = -v$, για κάθε $v \in V$.

7.4 Άσκηση: Αποδείξτε τις πιο πάνω ιδιότητες.

7.5 Παραδείγματα:

1. Το επίπεδο $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ με την συνήθη πρόσθεση (κατά συντεταγμένη) και τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό αποτελούν διανυσματικό χώρο επί του $\mathbf{R}$.

2. Οι πίνακες με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, $(M_{n\times m}(\mathbf{R}), +, \cdot)$, αποτελούν διανυσματικό χώρο επί του $\mathbf{R}$.

3. Το επίπεδο $\mathbf{R}^2$ με πρόσθεση και εξωτερικό πολλαπλασιασμό που δίνονται από τους ορισμούς

$$(a, b) + (c, d) \underset{\text{ορ}}{=} (a + c, 2b + 2d) \quad \text{και} \quad \lambda(a, b) \underset{\text{ορ}}{=} (\lambda a, \lambda b)$$

   αντίστοιχα, <u>δεν</u> αποτελεί διανυσματικό χώρο επί του $\mathbf{R}$, καθώς

$$(2a, 2b) = 2(a, b) = (1 + 1)(a, b) = 1(a, b) + 1(a, b) = (a, b) + (a, b) = (2a, 4b).$$

7.6 Ορισμός: Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbf{R}$. Έστω επιπλέον $v_1, \ldots, v_k$ k διανύσματα, στοιχεία, του V. Κάθε πεπερασμένο άθροισμα της μορφής

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

όπου $\lambda_1, \ldots,_k \in \mathbf{R}$ θα λέγεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_k$.