# ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

## 6η ΔΙΑΛΕΞΗ

**6.1 Ορισμός:** Ένας πίνακας $A$ βρίσκεται σε βαθμωτή μορφή αν και μόνο αν

1. Κάθε μη μηδενική γραμμή προηγείται όλων των μηδενικών γραμμών, και
2. το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής του βρίσκεται αριστερότερα του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου όλων των γραμμών που έπονται.

**6.2 Παράδειγμα:** Μόνο ο πρώτος από τους πιο κάτω πίνακες είναι σε βαθμωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**6.3 Παρατήρηση:** Έχουμε δει ότι οι γραμμοσοδυναμίες πινάκων δεν είναι τίποτε άλλο από την κωδικοποίηση της μεθόδου απαλοιφής Gauß στην γλώσσα των πινάκων. Στόχος της μεθόδου απαλοιφής Gauß είναι να φέρουμε το γραμμικό σύστημα **??** σε <u>βαθμωτή</u> μορφή καθώς όπως έχουμε δει αυτή επιλύεται εύκολα.
Από κατασκευής της μεθόδου απαλοιφής Gauß παρατηρεί κανείς ότι μέσω αυτής το γραμμικό σύστημα πάντα έρχεται σε βαθμωτή μορφή. Κατ' αναλογία,

| κάθε πίνακας είναι γραμμοισοδύναμος με βαθμωτό πίνακα. |
|---|

Από τη συζήτηση στην παράγραφο **??** και την παρατήρηση 6.3 προκύπτει

| **6.4 Πρόταση:** Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι γραμμοισοδύναμος με τον ταυτοτικό $I_n$. |
|---|

**6.5 Ορισμός:** <u>Τάξη</u> ενός πίνακα $A$ ως προς τις γραμμές είναι ο αριθμός που εκφράζει το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών όταν αυτός βρίσκεται σε βαθμωτή μορφή.

**6.6 Παράδειγμα:** Στο πιο πάνω παράδειγμα 6.2, ο βαθμός του πρώτου πίνακα ως προς τις γραμμές είναι 3, του δεύτερου επίσης 3 γιατί

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -0 & -1 \end{pmatrix} \overset{lin}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 9 \end{pmatrix},$$

ενώ του τρίτου είναι 2 καθώς

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{lin}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**6.7 Παρατήρηση:** Ένας πίνακας $A$ είναι πιθανό να έχει <u>πολλές</u> βαθμωτές μορφές, η τάξη του ωστόσο ως προς τις γραμμές είναι <u>μοναδική</u>.

Συνδυάζοντας την πρόταση 6.4 και τον ορισμό 6.5 έχουμε

**6.8 Πρόταση:** Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η τάξη του ως προς τις γραμμές είναι $n$.

## 6.9 ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

**6.10 Ερώτημα:** Αρχικά το ευκολότερο ερώτημα: «*Πότε ένα σύστημα σε βαθμωτή μορφή έχει ή* **δεν** *έχει λύση;*»

**6.11 Παράδειγμα:** Το ευκολότερο παράδειγμα, ίσως, που μπορεί να σκεφτεί κανείς είναι αυτό μιας γραμμικής εξίσωσης

$$ax = b\,,\ \text{όπου}\, a = 0\,\text{και}\, b \neq 0.$$

Γενικότερα, η μοναδική περίπτωση γραμμικής εξίσωσης χωρίς λύση είναι η

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \neq 0. \tag{6.11.1}$$

Ένας τρόπος να κατασκευάσουμε μη επιλύσιμο γραμμικό σύστημα είναι να συμπεριλάβουμε σ' αυτό μία τουλάχιστο γραμμική εξίσωση της μορφής 6.11.1, αφού αυτή δεν έχει λύσεις ούτε το σύστημα θα έχει λύσεις. Αν επιπλέον απαιτήσουμε το σύστημα να είναι σε βαθμωτή μορφή τότε, μια τέτοια εξίσωση μπορεί να είναι μόνον η τελευταία εξίσωση του συστήματος.

**6.12 Πρόταση:** Ένα γραμμικό σύστημα σε βαθμωτή μορφή έχει λύση αν και μόνο αν η τελευταία εξίσωση του συστήματος έχει λύση.

Ένα γραμμικό σύστημα σε βαθμωτή μορφή έχει λύση αν και μόνο αν η τελευταία εξίσωση του συστήματος **δεν** είναι της μορφής 6.11.1.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς **??**, 6.5, ένα γραμμικό σύστημα σε βαθμωτή μορφή έχει λύση αν και μόνο αν

$$\{\text{η τάξη ως προς τις γραμμές του πίνακα του συστήματος}\} =$$
$$\{\text{η τάξη ως προς τις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του συστήματος}\}.$$

**6.13 Ορισμός:** Ένα γραμμικό σύστημα θα λέγεται ομογενές αν και μόνο αν όλοι οι σταθεροί όροι των εξισώσεων που συμμετέχουν σ' αυτό είναι μηδενικοί. Δηλαδή, αν είναι της μορφής

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array}\right\}.$$

**6.14 Παρατήρηση:** Ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα λύση, τη μηδενική. Αυτό διαπιστώνεται είτε άμεσα είτε ως συνέπεια της πρότασης 6.12 καθώς η τάξη του πίνακα ενός ομογενούς συστήματος ισούται πάντα με την τάξη του επαυξημένου πίνακα.