ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

5η ΔΙΑΛΕΞΗ

5.1 ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΓΡΑΜΜΟΙΣΟΔΥΝΑΜΙΩΝ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΑΠΟ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΜΕ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΠΙΝΑΚΑ (συνέχεια)

Θα επανεξετάσουμε τη διαδικασία που αναπτύξαμε στο παράδειγμα **??** με τρόπο ώστε να μπορέσουμε να εξαγάγουμε συστηματικά συγκεκριμένα συμπεράσματα. **Συμβολισμός:** Έστω $I_n \in M_{n\times n}$, ο μοναδιαίος τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Θα συμβολίζουμε με :

1. $\mathbf{L}_{n,\{\lambda\cdot i\}}$ το στοιχειωδώς γραμμοισοδύναμο του ταυτοτικού, I_n, πίνακα που προκύπτει με εφαρμογή του 1.**??**, δηλαδή, με πολλαπλασιασμό της i-γραμμής του I_n με το μη μηδενικό αριθμό λ,

2. $\mathbf{L}_{n,\{i,j\}}$ το στοιχειωδώς γραμμοισοδύναμο του ταυτοτικού, I_n, πίνακα που προκύπτει με εφαρμογή του 2.**??**, δηλαδή, με ανταλλαγή των γραμμών i και j του I_n,

3. $\mathbf{L}_{n,\{\lambda\cdot i+j\}}$ το στοιχειωδώς γραμμοισοδύναμο του ταυτοτικού, I_n, πίνακα που προκύπτει με εφαρμογή του 3.**??**, δηλαδή, με πρόσθεση του γινομένου της i-γραμμής επί λ στη j-γραμμή του I_n.

5.2 Παράδειγμα: Κάθε στοιχειώδης γραμμοισοδυναμία, της μορφής 1., 2., 3. του ορισμού **??** αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό από αριστερά με ένα από τους πιο πάνω πίνακες $\mathbf{L}_{*,\{*\cdot *\dagger *\}}$ της μορφής 1., 2. και 3. αντίστοιχα.

1.

$$\mathbf{L}_{3,\{-7\cdot 2\}}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,k} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,k} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ -7a_{2,1} & \cdots & -7a_{2,k} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,k} \end{pmatrix}$$

2.

$$\mathbf{L}_{4,\{1,3\}}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,k} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,k} \\ a_{4,1} & \cdots & a_{4,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,k} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,k} \\ a_{4,1} & \cdots & a_{4,k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{3,1} & \cdots & a_{3,k} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,k} \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{4,1} & \cdots & a_{4,k} \end{pmatrix}$$

3.

$$\mathbf{L}_{2,\{\pi\cdot 1+2\}}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,k} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \pi a_{1,1}+a_{2,1} & \cdots & \pi a_{1,k}+a_{2,k} \end{pmatrix}$$

5.3 Παρατήρηση: Γραμμικά συστήματα (υπό προϋποθέσεις) και εύρεση αντίστροφου πίνακα φαίνεται ότι είναι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος.

5.4 Παράδειγμα: Θεωρώ προς επίλυση το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & & & = & 6 \\ & & 3y & + & z & = & -1 \\ 4x & - & y & & & = & 12 \end{array}\right\}.$$

Αν

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ο πίνακας του συστήματος,}$$

$$X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{το «διάνυσμα» αγνώστων, και}$$

$$C := \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \text{το «διάνυσμα» σταθερών όρων του συστήματος}$$

τότε το πιο πάνω σύστημα γράφεται στη μορφή

$$A\,X = C,$$

οπότε αν ο αντίστροφος πίνακας του A, A^{-1}, υπάρχει και είναι με κάποιο τρόπο γνωστός τότε, η λύση του συστήματος δίνεται από ένα απλό πολλαπλασιασμό πινάκων

$$X = A^{-1}\,C.$$

Στο παράδειγμα αυτό, όπως θα δούμε,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

οπότε

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5.5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Διαπιστώνουμε ότι, συχνά, η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, μεταφρασμένο στη γλώσσα των πινάκων, αντιστοιχεί στην εύρεση ενός αντίστροφου πίνακα. Κατ'αναλογία, όπως χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο Gauß για την επίλυση γραμμικών συστημάτων, θα χρησιμοποιήσουμε γραμμοϊσοδυναμίες, ήτοι τη μέθοδο Gauß στη γλώσσα των πινάκων, για την εύρεση αντίστροφου πίνακα.

Παράδειγμα: Εξετάζω αρχικά αν ο πίνακας

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$$

είναι γραμμοισοδύναμος με τον ταυτοτικό I_3. Στη συνέχεια βρίσκω τον αντίστροφό του.

$$\begin{array}{cccc}
A & = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(-2)L_1 + L_2} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{L_2 + L_3} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(-1/3)L_2} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(-1)L_2 + L_1} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(1/2)L_1} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = \\[2ex]
I_3 & & &
\end{array}$$

Εφαρμόζοντας το συμβολισμό της παραγράφου 5.1 και τη μέθοδο που αναπτύξαμε στο παράδειγμα **??** βλέπουμε ότι

$$I_3 = \mathbf{L}_{3,\{(1/2)\cdot 1\}} \mathbf{L}_{3,\{(-1)\cdot 2+1\}} \mathbf{L}_{3,\{(-1/3)\cdot 2\}} \mathbf{L}_{3,\{2+3\}} \mathbf{L}_{3,\{(-2)\cdot 1+2\}} \mathbf{L}_{3,\{2,3\}} A.$$

Γίνεται φανερό, (άσκηση), ότι

$$A^{-1} = \mathbf{L}_{3,\{(1/2)\cdot 1\}} \mathbf{L}_{3,\{(-1)\cdot 2+1\}} \mathbf{L}_{3,\{(-1/3)\cdot 2\}} \mathbf{L}_{3,\{2+3\}} \mathbf{L}_{3,\{(-2)\cdot 1+2\}} \mathbf{L}_{3,\{2,3\}}.$$

Αξίζει να σημειωθεί, άσκηση ότι κάθε ένας από τους στοιχειώδεις πίνακες $\mathbf{L}_{*,\{*\cdot *\dagger *\}}$ είναι αντιστρέψιμος, γεγονός που αποδεικνύει εναλλακτικά την αντιστρεψιμότητα του πίνακα A^{-1}. Το ίδιο ακριβώς θέμα είχε συζητηθεί στην **??** με την αντιστρεψιμότητα του πίνακα J εκεί.

5.6 Τη διαδικασία του πιο πάνω παραδείγματος 5.5 κωδικοποιούμε προς διευκόλυνση με τον ακόλουθο τρόπο:

Παραθέτουμε δεξιά του πίνακα A τον ταυτοτικό, εδώ τον I_3, σ' ένα διευρυμένο πίνακα 3×6. Στον διευρυμένο πίνακα πλέον εφαρμόζουμε την πιο πάνω σειρά γραμμοισοδυναμιών ώστε να καταλήξουμε σε ένα 3×6 πίνακα ο οποίος θα έχει στη θέση του A τον ταυτοτικό. Ο γραμμοισοδύναμος του ταυτοτικού που βρίσκεται δεξιά του είναι ο αντίστροφος του A. Συγκεκριμένα, στο πιο πάνω παράδειγμα

$$
\left(A \mid I_3 \right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)L_1 + L_2}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 + L_3}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1/3)L_2}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)L_2 + L_1}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1/2)L_1}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(I_3 \mid A^{-1} \right).
$$