

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

4η ΔΙΑΛΕΞΗ

4.1 Ορισμοί: Έστω πίνακας $A \in M_{n \times m}$, $A = (a_{ij})$. Ορίζουμε ως ανάστροφο του A και συμβολίζουμε A^t τον πίνακα $A^t = B \in M_{m \times n}$ με $B = (b_{ij})$ όπου $b_{ij} := a_{ji}$ για όλα τα i, j με $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Ένας τετραγωνικός πίνακας A , θα λέμε ότι

1. είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $A = A^t$, και ότι
2. είναι αντισυμμετρικός αν και μόνο αν $A = -A^t$.

Παραδείγματα:

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & -4 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{τότε } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ο πρώτος από τους πιο κάτω πίνακες είναι συμμετρικός ενώ ο δεύτερος αντισυμμετρικός

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΡΑΜΜΟΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός: Έστω πίνακες $A, B \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$. Θα λέμε ότι ο πίνακας B είναι στοιχειωδώς γραμμοισοδύναμος του πίνακα A αν και μόνο αν ο B προκύπτει από τον A είτε:

1. Με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής του A επί μη μηδενικό πραγματικό αριθμό
2. Με ανταλλαγή δύο γραμμών του πίνακα A
3. Με αντικατάσταση μιας γραμμής του πίνακα A με το αποτέλεσμα της πρόσθεσης σε αυτή μιας άλλης γραμμής πολλαπλασιασμένης με κάποιο πραγματικό αριθμό.

Θα λέμε γενικότερα ότι ο A είναι γραμμοισοδύναμος του B και θα συμβολίζουμε $A \stackrel{lin}{\sim} B$, αν και μόνο αν ο B προκύπτει από τον A μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας στοιχειωδών γραμμοισοδυναμιών.

4.3 Παρατήρηση: Εξετάζοντας τις τρεις πιο πάνω στοιχειώδεις γραμμοισοδυναμίες, παρατηρούμε ότι αν ο πίνακας A είναι στοιχειωδώς γραμμοισοδύναμος με τον πίνακα B , τότε και ο B είναι στοιχειωδώς γραμμοισοδύναμος με τον πίνακα A . Μπορούμε λοιπόν να μιλάμε για γραμμοισοδύναμους πίνακες.

4.4 Παράδειγμα: Οι πίνακες A και B πιο κάτω είναι γραμμοισοδύναμοι μέσω της πιο κάτω ακολουθίας στοιχειωδών γραμμοισοδυναμιών.

$$\begin{aligned}
 A &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)L_1} \\
 &\begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1+L_3} \\
 &\begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)L_2+L_3} \\
 &\begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} =: B
 \end{aligned}$$

4.5 Παρατήρηση: Η διαδικασία των στοιχειωδών γραμμοισοδυναμιών κωδικοποιεί στη γλώσσα των πινάκων τη μέθοδο απαλοιφής Gauß. Δηλαδή, γραμμοισοδύναμοι πίνακες αντιστοιχούν σε ισοδύναμα συστήματα (συστήματα που έχουν ίδια σύνολα λύσεων). Αντίστροφα, πίνακες ισοδύναμων γραμμικών συστημάτων είναι γραμμοισοδύναμοι.

$\{\text{γραμμοισοδυναμίες πινάκων}\} \iff \{\text{μέθοδος απαλοιφής Gauß}\}.$

4.6 ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΓΡΑΜΜΟΙΣΟΔΥΝΑΜΙΩΝ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΑΠΟ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΜΕ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΠΙΝΑΚΑ

Στο προηγούμενο παράδειγμα 4.4 αν βαφτίσω M_1 και M_2 τους ενδιάμεσους πίνακες,

$$M_1 := \begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M_2 := \begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -8 \end{pmatrix},$$

έχω ότι

$$A \xrightarrow{(-3)L_1} M_1 \xrightarrow{L_1+L_3} M_2 \xrightarrow{(5)L_2+L_3} B.$$

Παρατηρώντας προσεκτικότερα διαπιστώνω ότι

$$\begin{aligned}
 (4.6.1) \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \\
 &\begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = M_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.6.2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \\
 &\begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -8 \end{pmatrix} = M_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.6.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -8 \end{pmatrix} = \\
 &\begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} = B.
 \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις 4.6.1, 4.6.2, 4.6.3 βλέπω ότι

$$\underbrace{\left[\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \right]}_J A = B,$$

όπου

$$J := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή, στο συγκεκριμένο τουλάχιστον παράδειγμα, δείξαμε ότι υπάρχει κατάλληλος πίνακας J ώστε $JA = B$.

Αν την ιδιότητα αυτή την απολαμβάνουν γενικά γραμμοισοδύναμοι πίνακες, τότε εξ' αιτίας της ανακλαστικότητας θα πρέπει να αναμένει κανείς ο πίνακας J να είναι επιπλέον αντιστρέψιμος ώστε και $A = J^{-1}B$. Πράγματι, θα δούμε ότι έτσι είναι καθώς έκαστος των ενδιαμέσων πινάκων το γινόμενο των οποίων είναι ο J είναι αντιστρέψιμος.