ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

3η ΔΙΑΛΕΞΗ

3.1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ (συνέχεια)

Ορισμός (πολλαπλασιασμός πινάκων): Επίσης, αν $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$ και $C = (c_{l\xi}) \in M_{m\times r}(\mathbf{R})$ ορίζουμε (εσωτερικό) γινόμενο πινάκων ένα νέο πίνακα $AC =: D = (d_{st}) \in M_{n\times r}(\mathbf{R})$ με εγγραφές

$$d_{st} = \sum_{k=1}^{m} a_{sk}c_{kt}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν μπορώ να πολλαπλασιάσω τυχαίους πίνακες, αλλά μόνο πίνακες για τους οποίους ισχύει ότι *ο αριθμός στηλών του πρώτου πίνακα είναι ίσος με τον αριθμό γραμμών του δευτέρου πίνακα.*

Παράδειγμα: Αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{τότε} \quad AB = C,$$

$$\text{όπου} \quad C = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 5\cdot 0 + 3\cdot 1 & 5\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 6\cdot 0 + 7\cdot 1 & 6\cdot 1 + 7\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού:

1. Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$A(BC) = (AB)C, \forall\, A \in M_{n\times m}(\mathbf{R}), B \in M_{m\times k}(\mathbf{R}), C \in M_{k\times l}(\mathbf{R}).$$

2. Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου,

$$\exists\, I_n \in M_{n\times n}(\mathbf{R})\, \text{ώστε}\, I_nA = AI_n = A, \forall\, A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$$

[από αριστερά:

$$\exists\, I_n \in M_{n\times n}(\mathbf{R})\, \text{ώστε}\, I_nA = A, \forall\, A \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$$

και από δεξιά:

$$\exists\, I_m \in M_{n\times m}(\mathbf{R})\, \text{ώστε}\, AI_m = A, \forall\, A \in M_{m\times m}(\mathbf{R}),]$$

όπου $I_n = (\delta_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, με $\delta_{i,j} = 0$ για $i \neq j$ και $\delta_{i,i} = 1$ ή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και αντίστοιχα για τον I_m.

3. Επιμεριστική ιδιότητα ως προς πολλαπλασιασμό:

$$C(A+B) = CA + CB, \forall\, C \in M_{n\times m} \text{και} A, B \in M_{m\times l}.$$

3.2 Παρατήρηση: Αξίζει να σημειωθεί ότι με τον ορισμό των πινάκων και των πράξεων τους ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων όπως

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 5y & - & 3z & - & 2w & = & -1 \\ 5x & + & 4y & - & 4z & + & 7w & = & 2 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & + & 2w & = & 3 \end{array} \right\}$$

μπορεί να γραφεί στη γλώσσα των πινάκων με τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & -4 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

γεγονός που παραπέμπει στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων ενός αγνώστου της μορφής $A \cdot X = C$ αν

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & -4 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3.3 Παρατήρηση: Αντίθετα με την πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός πινάκων <u>δεν</u> κληρονομεί όλες τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών.

1. Η ιδιότητα του αντιστρόφου, $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$, <u>δεν</u> ισχύει για όλους τους $0 \neq A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$.
   Παράδειγμα: Ο πίνακας
   $$0 \neq A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   δεν έχει αντίστροφο.

   Απόδειξη: Αν είχε αυτός θα ήταν της μορφής $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ για τον οποίο θα έπρεπε να ισχύει η ιδιότητα του αντιστρόφου $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$, δηλαδή θα έπρεπε
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Αλλά ήδη από την πρώτη ισότητα έχουμε
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   που είναι άτοπο.

2. **Ερώτημα:** Υπάρχουν πίνακες για τους οποίους να υπάρχει αντίστροφος;

   Παράδειγμα: Αν
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   θα δείξω ότι ο πίνακας αυτός αντιστρέφεται. Αναζητώ τον αντίστροφο τον οποίο και συμβολίζω με A^{-1} με τον μοναδικό τρόπο που γνωρίζω, δηλαδή τον ορισμό. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   τότε θα πρέπει $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$, δηλαδή
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   από όπου προκύπτει το σύστημα
$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} a & + & & & + & 2c & & = 1 \\ & & b & + & & & + \; 2d & = 0 \\ & & & & & 2c & & = 0 \\ & & & & & & 2d & = 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccr} a & = & 1 \\ b & = & -1 \\ c & = & 0 \\ d & = & \frac{1}{2} \end{array} \right\}.$$
   Εξετάζουμε αν επιπλέον ισχύει και η άλλη ισότητα
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Η αντιμεταθετική ιδιότητα επίσης δεν ισχύει γενικά.
   Παράδειγμα: Έστω
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Παρατηρεί κανείς ότι
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

3.4 Παρατήρηση: Εκκινώντας από την παρατήρηση [?] και για την περίπτωση εκείνη για την οποία ο πίνακας του συστήματος A είναι τετραγωνικός τότε, αν υπάρχει ο αντίστροφος μπορώ να επιλύσω ένα γραμμικό σύστημα με τον ίδιο τρόπο που θα έλυνα μια γραμμική εξίσωση. Συγκεκριμένα,

Παράδειγμα: $\boxed{???}$