ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

2η ΔΙΑΛΕΞΗ

2.1 Συνοπτικά λοιπόν η **μέθοδος της απαλοιφής Gauß** όπως αυτή παρουσιάστηκε στο παράδειγμα **??**-3 συνίσταται στα εξής βήματα :

1. «Στοιχίζω» τους αγνώστους του συστήματος.
2. Αναδιατάσσοντας αν χρειάζεται τις εξισώσεις του συστήματος, εκκινώ με εξίσωση της οποίας ο πρώτος μη μηδενικός όρος είναι αριστερότερα του πρώτου μη μηδενικού όρου όλων των άλλων εξισώσεων.
3. Απαλείφω τους αγνώστους (συντελεστές) που βρίσκονται στην ίδια στήλη με το πρώτο μη μηδενικό συντελεστή αγνώστου της πρώτης εξίσωσης πολλαπλασιάζοντας εξισώσεις «κατάλληλα» και προσθέτοντας.
4. Επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία για το υποσύστημα που προκύπτει αν αφαιρέσω την πρώτη εξίσωση (γραμμή).
5. Τελειώνω όταν έρθω σε βαθμωτή μορφή.

2.2 Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι κατά την επίλυση του γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο απαλοιφής Gauß, **??**-3 μετά το πρώτο βήμα (της στοίχισης των αγνώστων)

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} 5X & -4Y & +2Z & = & 8 & :\mathbf{L_1} \\ 2Y & +3Z & +2X & = & 9 & :\mathbf{L_2} \\ 7X & -3Z & +3Y & = & 14 & :\mathbf{L_3} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} 2Z & +5X & -4Y & = & 8 \\ 3Z & +2X & +2Y & = & 9 \\ -3Z & +7X & +3Y & = & 14 \end{array}\right\}$$

οι άγνωστοι δεν χρησιμοποιούνται ξανά. Μπορώ, δηλαδή, να τους «ξεχάσω» και να περιοριστώ στους συντελεστές τους, τους οποίους και γράφω σε διάταξη 3 γραμμών και 4 στηλών ανάλογα με τη θέση τους στο σύστημα:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & +5 & -4 \\ 3 & +2 & +2 \\ -3 & +7 & +3 \end{pmatrix} \begin{array}{r} 8 \\ 9 \\ 14 \end{array}\right).$$

Η εσωτερική διάταξη των πρώτων 3 γραμμών και 3 στηλών που αποτελείται <u>αποκλειστικά</u> από τους συντελεστές των αγνώστων θα λέγεται **πίνακας του συστήματος** ενώ ολόκληρη η πιο πάνω διάταξη των 3 γραμμών και 4 στηλών θα καλείται **προσαυξημένος πίνακας του συστήματος**. Ο προσαυξημένος, δηλαδή, διαφέρει από τον πίνακα του συστήματος ως προς το ότι έχει μία ακριβώς παραπάνω στήλη, την τελευταία, η οποία και αποτελείται από τους σταθερούς όρους του συστήματος.

2.3 ΠΙΝΑΚΕΣ n ΓΡΑΜΜΩΝ ΚΑΙ m ΣΤΗΛΩΝ

Ορισμός: Κάθε διάταξη nm πραγματικών (αντ. μιγαδικών, ρητών, κ.τ.λ.) αριθμών σε, A, σε n γραμμές και m στήλες της μορφής

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

θα λέγεται πίνακας n γραμμών και m στηλών. Ο πίνακας, $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$, θα λέγεται πραγματικός (αντ. μιγαδικός, ρητός, κ.τ.λ.) αν όλες του οι εγγραφές ή στοιχεία, a_{ij}, είναι πραγματικοί (αντ. μιγαδικοί, ρητοί, κ.λ.π.) αριθμοί. Το σύνολο όλων των πραγματικών (αντ. μιγαδικών, ρητών, κ.τ.λ.) πινάκων θα συμβολίζουμε $M_{n\times m}(\mathbf{R})$ (αντ. $M_{n\times m}(\mathbf{C}), M_{n\times m}(\mathbf{Q})$, κ.τ.λ.).

Παράδειγμα:

$$M_{2\times 3}(\mathbf{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbf{Z} \right\}$$

2.4 ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Οι πίνακες A, B είναι ίσοι εάν κάθε στοιχείο (εγγραφή) του ενός πίνακα είναι ίσο με το αντίστοιχο στοιχείο (εγγραφή) του άλλου πίνακα. Δηλαδή:

$$A = B \quad \text{αν και μόνο αν} \quad a_{i,j} = b_{i,j} \quad \text{για όλα τα} \quad i, j.$$

Παράδειγμα: Αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5-2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

τότε $A = B$ και $A \neq B$.

Παρατήρηση: Παρατηρεί κανείς ότι το σύνολο $M_{1\times 1}(\mathbf{R})$ βρίσκεται σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$, $M_{1\times 1}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{R} \quad (3) \sim \mathbf{3}, (e^{\pi}) \sim \mathbf{e}^{\pi}$.

2.5 ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Όπως γίνεται συνήθως μετά την εισαγωγή ενός νέου μαθηματικού αντικειμένου ενδιαφερόμαστε να ορίσουμε κανόνες παραγωγής νέων τέτοιων αντικειμένων από άλλα γνωστά.

Ορισμός (άθροισμα και «βαθμωτός» πολλαπλασιασμός πινάκων): Αν $A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij} \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$ και $\lambda \in \mathbf{R}$ ορίζουμε άθροισμα και (εξωτερικό) γινόμενο αριθμού επί πίνακα αντίστοιχα τους πίνακες

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij} \quad \text{και} \quad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{ij} \quad \in M_{n\times m}(\mathbf{R}).$$

Παράδειγμα: Αν

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A + B = C,$$

$$\text{όπου} \quad C = \begin{pmatrix} 2+4 & 3+3 \\ 6-1 & 7+0 \\ 9+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, αν

$$A := \begin{pmatrix} 1 & e & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \pi A = \begin{pmatrix} \pi & \pi e & 2\pi \\ 0 & 3\pi & 5\pi \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση

1. Είναι φανερό ότι ορισμός ανάλογος του 2.5 μπορούν να διατυπωθεί για το σύνολο $M_{n\times m}(\mathbf{C})$, των $n \times m$ πινάκων με μιγαδικές εγγραφές, ρητές, κ.τ.λ..

2. Ως αποτέλεσμα της παρατήρησης 2.4 είναι φυσιολογικό ο ορισμός 2.5 να γενικεύει τις αντίστοιχες πράξεις των πραγματικών αριθμών. Παρά ταύτα, όπως θα δούμε, αυτό δεν σημαίνει ότι όλες οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών μεταφέρονται αυτούσιες στους πίνακες.

3. Σε ό,τι αφορά στην πρόσθεση, οι ιδιότητες της πρόσθεσης των πραγματικών αριθμών μεταφέρονται αυτούσιες:

   - Αντιμεταθετική ιδιότητα:
   $$A + B = B + A, \,\forall\, A, B \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$$
   - Προσεταιριστική ιδιότητα:
   $$A + (B + C) = (A + B) + C, \,\forall\, A, B, C \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$$
   - Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου:
   $$\exists\, 0 \in M_{n\times m}(\mathbf{R})\, \text{ώστε}\, 0 + A = A + 0 = A, \,\forall\, A \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$$
   - Ύπαρξη αντιστρόφου στοιχείου:
   $$\forall\, A \in M_{n\times m}(\mathbf{R}),\, \exists(-A) \in M_{n\times m}(\mathbf{R}),\, \text{ώστε}\, A + (-A) = (-A) + A = 0$$
   - Επιμεριστική ιδιότητα ως προς τον «βαθμωτό» πολλαπλασιασμό:
   $$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B, \,\forall\, A, B \in M_{n\times m}(\mathbf{R}), \lambda \in \mathbf{R}$$
   - Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση:
   $$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A, \,\forall\, A \in M_{n\times m}(\mathbf{R}), \lambda\mu \in \mathbf{R}$$
   - Προσεταιριστική ως προς τον «βαθμωτό» πολλαπλασιασμό ιδιότητα:
   $$(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A), \,\forall\, A \in M_{n\times m}(\mathbf{R}), \lambda\mu \in \mathbf{R}$$
   - $1 \cdot A = A, \,\forall\, A \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$.

Ένα σύνολο $(V, +)$ εφοδιασμένο με μια πράξη «+» που ικανοποιεί τις πρώτες τέσσερις ιδιότητες θα λέμε ότι αποτελεί **ομάδα**. Έτσι, οι πίνακες με την πρόσθεση, $(M_{n\times m}(\mathbf{R}), +)$, αποτελούν ομάδα. Μία ομάδα εφοδιασμένη με «βαθμωτό» πολλαπλασιασμό, $(V, +, \cdot)$ που να ικανοποιεί το σύνολο των πιο πάνω ιδιοτήτων θα λέγεται **διανυσματικός χώρος επί του R**. Οι πίνακες με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, $(M_{n\times m}(\mathbf{R}), +, \cdot)$, αποτελούν διανυσματικό χώρο επί του $\mathbf{R}$.

Παράδειγμα: Το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων μιας μεταβλητής $\mathbf{R}[X]$ όπως τα ορίσαμε στην **??**, με πρόσθεση τη συνήθη πρόσθεση πολυωνύμων και εξωτερικό πολλαπλασιασμό τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού επί πολυώνυμο αποτελεί παράδειγμα διανυσματικού χώρου επί του $\mathbf{R}$.