ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

1η ΔΙΑΛΕΞΗ

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Όλοι οι άγνωστοι, είναι υψωμένοι στην πρώτη δύναμη και δεν υπάρχουν γινόμενα μεταξύ των αγνώστων.

Παραδείγματα γραμμικών εξισώσεων:

1. $X = 0$,
2. $3X + 5 = 0$,
3. $6X + 7Y + 32Z = 15$.

1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στις μη γραμμικές εξισώσεις παρατηρούμε ότι οι άγνωστοι είναι υψωμένοι σε δύναμη μεγαλύτερη της μονάδας και(ή) υπάρχουν γινόμενα μεταξύ των αγνώστων, σε αντίθεση με τις γραμμικές εξισώσεις.

Παραδείγματα μη γραμμικών εξισώσεων:

1. $6XY + 7Z = 0$,
2. $6X2 + 2X + 1 = 0$,
3. $4X + 5Y3 + 5 = 14$.

1.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΤΟΥ X

Κάθε τυπικό άθροισμα της μορφής:

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \,, \quad \text{όπου} \quad a_n, \ldots, a_0 \in \mathbf{R}$$

θα λέγεται πραγματικό πολυώνυμο μιας μεταβλητής, του X.

Παράδειγμα: $5X^2 + 6$, $7X^{128} + 8X^{1983} + 1$

Το σύνολο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς θα συμβολίζεται $\mathbf{R}[X]$.

Παράδειγμα:

1. $\mathbf{R}[X] := \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \,, \quad \text{όπου} \quad a_n, \ldots, a_0 \in \mathbf{R}\}$,
2. $\mathbf{C}[X] := \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \,, \quad \text{όπου} \quad a_n, \ldots, a_0 \in \mathbf{C}\}$,
3. $\mathbf{Z}[X] := \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \,, \quad \text{όπου} \quad a_n, \ldots, a_0 \in \mathbf{Z}\}$.

Όμοια, κάθε τυπικό άθροισμα της μορφής:

$$a_{n,m} X^n Y^m + \cdots + a_{0,0} \,, \quad \text{όπου} \quad a_{n,m}, \ldots, a_{0,0} \in \mathbf{R}$$

θα λέγεται πραγματικό πολυώνυμο δύο μεταβλητών, των X, Y. Το σύνολο όλων αυτών θα συμβολίζεται $\mathbf{R}[X, Y]$. Το ίδιο για τρεις ή περισσότερες μεταβλητές.

Οι προσθετέοι που συμμετέχουν στα πιο πάνω αθροίσματα λέγονται **μονώνυμα**. Το άθροισμα των εκθετών των αγνώστων που συμμετέχουν σε κάθε ένα από τα μονώνυμα λέγεται **βαθμός του μονωνύμου**. Ο μέγιστος των βαθμών των μονωνύμων που συμμετέχουν σ' ένα πολυώνυμο καλείται **βαθμός του πολυωνύμου** $f(X, Y) \in \mathbf{R}[X, Y]$ και συμβολίζεται $\deg f(X, Y) \in \mathbf{N}$.

Παράδειγμα: Αν $f(X, Y, Z) = 3XY + 2XY^2 + 3Z + 1$ τότε $\deg f = 3$.

1.4 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Κάθε εξίσωση $f(X_1, X_2, \ldots, X_k) = 0$, θα λέγεται πολυωνυμική αν και μόνον αν $f(X_1, X_2, \ldots, X_k) \in \mathbf{K}[X_1, X_2, \ldots, X_k]$, όπου $\mathbf{K}$ κάποιο σύνολο αριθμών.

1.5 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων αποτελεί κάθε πεπερασμένο πλήθος πολυωνυμικών εξισώσεων, μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών, πρώτου βαθμού. Με τον όρο «επίλυση» του συστήματος εννοούμε την ταυτόχρονη επίλυση όλων των εξισώσεων που συμμετέχουν σε αυτό.

Παράδειγμα:

1. Το απλούστερο δυνατό σύστημα:

$$2X - 10 = 0.$$

   Επίλυση:

$$2X - 10 = 0 \;\Rightarrow\; 2X = 10 \;\Rightarrow\; X = 5.$$

2. Σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{array}{rcrcr} 2X & + & 3Y & = & -4 \\ X & + & 4Y & = & -7 \end{array}$$

   Επίλυση:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X + 3Y = -4 \\ X + 4Y = -7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2X + 3Y = -4 \\ X = -7 - 4Y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(-7 - 4Y) + 3Y = -4 \\ X + 4Y = -7 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -14 - 8Y + 3Y = -4 \\ X + 4Y = -7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5Y = 10 \\ X + 4Y = -7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = -2 \\ X = -7 - 4(-2) = 1 \end{array} \right\}$$

   Σημείωση: Λύνεται επίσης και με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauß που θα εφαρμοστεί στη συνέχεια στο σύστημα τριών γραμμικών εξισώσεων.

3. Σύστημα τριών γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 5X & - & 4Y & + & 2Z & = & 8 & :\mathbf{L_1} \\ 2Y & + & 3Z & + & 2X & = & 9 & :\mathbf{L_2} \\ 7X & - & 3Z & + & 3Y & = & 14 & :\mathbf{L_3} \end{array}$$

Επίλυση: Μέθοδος απαλοιφής **Gauß**.

1ο βήμα: Στοιχίζω τους αγνώστους ως εξής:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} 5X & -4Y & +2Z & = & 8 & :\mathbf{L_1} \\ 2Y & +3Z & +2X & = & 9 & :\mathbf{L_2} \\ 7X & -3Z & +3Y & = & 14 & :\mathbf{L_3} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} 2Z & +5X & -4Y & = & 8 \\ 3Z & +2X & +2Y & = & 9 \\ -3Z & +7X & +3Y & = & 14 \end{array}\right\}$$

2ο βήμα: Με στόχο να διώξω τους συντελεστές του Z κάτω από την πρώτη γραμμή $\mathbf{L_1}$ πολλαπλασιάζω την πρώτη εξίσωση $\mathbf{L_1}$ με συντελεστή κατάλληλο $(-3/2)$ έτσι ώστε η καινούργια $\mathbf{L_{1*}}$ που θα προκύψει προστιθέμενη στην $\mathbf{L_2}$ να απαλείψει τα Z της $\mathbf{L_2}$.

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} 2Z & +5X & -4Y & = & 8 & :\mathbf{L_1} \\ \boxed{3Z} & +2X & +2Y & = & 9 & :\mathbf{L_2} \\ -3Z & +7X & +3Y & = & 14 & :\mathbf{L_3} \end{array}\right\} \quad \xLeftrightarrow{(-3/2)L_1}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} -3Z & -15/2X & +6Y & = & -12 & :\mathbf{L_{1*}} \\ \boxed{3Z} & +2X & +2Y & = & 9 & :\mathbf{L_2} \\ -3Z & +7X & +3Y & = & 14 & :\mathbf{L_3} \end{array}\right\} \quad \xLeftrightarrow{L_{1*}+L_2}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} -3Z & -15/2X & +6Y & = & -12 & :\mathbf{L_{1*}} \\ \boxed{0} & -11/2X & +8Y & = & -3 & :\mathbf{L_{2*}} \\ -3Z & +7X & +3Y & = & 14 & :\mathbf{L_3} \end{array}\right\}$$

Εφαρμόζω την ίδια μέθοδο προκειμένου να απαλείψω τα Z της τρίτης εξίσωσης $\mathbf{L_3}$. Πολλαπλασιάζω λοιπόν, την $\mathbf{L_{1*}}$ με (-1) και την προσθέτω στην $\mathbf{L_3}$. Προκύπτουν αντίστοιχα οι $\mathbf{L_{1**}}$ $\mathbf{L_{3*}}$ καθώς η $\mathbf{L_{2*}}$ παραμένει αμετάβλητη.

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} -3Z & -15/2X & +6Y & = & -12 & :\mathbf{L_{1*}} \\ \boxed{0} & -11/2X & +8Y & = & -3 & :\mathbf{L_{2*}} \\ \boxed{\boxed{-3Z}} & +7X & +3Y & = & 14 & :\mathbf{L_3} \end{array}\right\} \quad \xLeftrightarrow{(-1)L_1}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} 3Z & +15/2X & -6Y & = & 12 & :\mathbf{L_{1**}} \\ \boxed{0} & -11/2X & +8Y & = & -3 & :\mathbf{L_{2*}} \\ \boxed{\boxed{-3Z}} & +7X & +3Y & = & 14 & :\mathbf{L_3} \end{array}\right\} \quad \xLeftrightarrow{L_{1**}+L_3}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} 3Z & +15/2X & -6Y & = & 12 & :\mathbf{L_{1**}} \\ \boxed{0} & -11/2X & +8Y & = & -3 & :\mathbf{L_{2*}} \\ \boxed{\boxed{0}} & +29/2X & -3Y & = & 26 & :\mathbf{L_{3*}} \end{array}\right\}$$

Έχοντας απαλείψει τους συντελεστές των Z, συνεχίζω με την επόμενη μεταβλητή, τα X. Θέτοντας ως στόχο την απαλοιφή των X στην τρίτη εξίσωση $\mathbf{L_{3*}}$ πολλαπλασιάζω την $\mathbf{L_{2*}}$ με κατάλληλο συντελεστή, $(29/11)$, ώστε όταν την προσθέσω στην $\mathbf{L_3}$ να απαλειφθούν τα X. Προκύπτουν αντίστοιχα οι $\mathbf{L_{2**}}$ και $\mathbf{L_{3**}}$

καθώς η $\mathbf{L_{1**}}$ μένει αμετάβλητη.

$$\left\{\begin{array}{lllcll} 3Z & & +15/2X & -6Y & = & 12 & :\mathbf{L_{1**}} \\ \boxed{0} & & -11/2X & +8Y & = & -3 & :\mathbf{L_{2*}} \\ \boxed{\boxed{0}} & + & \boxed{\boxed{\boxed{29/2\mathrm{X}}}} & -3Y & = & 26 & :\mathbf{L_{3*}} \end{array}\right\} \xLeftrightarrow{(29/11)L_{2*}}$$

$$\left\{\begin{array}{lllcrrl} 3Z & & +15/2X & -6Y & = & 12 & :\mathbf{L_{1**}} \\ \boxed{0} & & -29/2X & +232/11Y & = & -87/11 & :\mathbf{L_{2**}} \\ \boxed{\boxed{0}} & + & \boxed{\boxed{\boxed{29/2\mathrm{X}}}} & -3Y & = & 26 & :\mathbf{L_{3*}} \end{array}\right\} \xLeftrightarrow{L_{2**}+L_3}$$

$$\left\{\begin{array}{lllcrrl} 3Z & +15/2X & & -6Y & = & 12 & :\mathbf{L_{1**}} \\ \boxed{0} & -29/2X & & +232/11Y & = & -87/11 & :\mathbf{L_{2**}} \\ \boxed{\boxed{0}} & + & \boxed{\boxed{\boxed{0}}} & 199/11Y & = & 199/11 & :\mathbf{L_{3*}} \end{array}\right\}$$

3ο βήμα: Καθώς όλα τα πιο πάνω συστήματα είναι ισοδύναμα, έχουν, δηλαδή, τις ίδιες λύσεις, αρκεί να λύσω το τελευταίου προκειμένου να λύσω και το πρώτο. Η μορφή του τελευταίου συστήματος λέγεται **βαθμωτή**, ορισμός 1.6, για τον προφανή λόγο. Λύνουμε με αντίστροφη σειρά, δηλαδή, λύνω πρώτα την $\mathbf{L_{3*}}$ και βρίσκω $Y = 1$, στη συνέχεια αντικαθιστώ την τιμή αυτή στη δεύτερη, $\mathbf{L_{2**}}$, και λύνω ως προς $\mathbf{X}$ για να βρώ την τιμή $X = 2$. Τέλος αντικαθιστώ τις τιμές αυτές, $Y = 1, X = 2$ στην πρώτη $\mathbf{L_{1**}}$ και λύνω ως προς Y για να βρω τελικά $Y = 1, X = 2, Z = 1$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Σε περίπτωση που σε οποιοδήποτε σημείο του 2ου βήματος περιέλθουμε σε κατάσταση όπως αυτή στο παράδειγμα που ακολουθεί

$$\begin{array}{lclclcll} 0 & + & 2X & + & 5Y & = & 7 & :\mathbf{L_1} \\ 3Z & + & 8X & + & 3Y & = & 9 & :\mathbf{L_2} \\ 5Z & + & 6X & + & 7Y & = & 0 & :\mathbf{L_3} \end{array}$$

αλλάζω την σειρά των εξισώσεων αναδιατάσσοντας τις προκειμένου να έρθω σε ισοδύναμο σύστημα όπου το 2ο βήμα θα μπορεί να εφαρμοστεί. Στο πιο πάνω σύστημα, για παράδειγμα, αντιμεταθέτω τις $\mathbf{L_1}$ και $\mathbf{L_3}$ διατηρώντας την $\mathbf{L_2}$ στη θέση της

$$\begin{array}{lclclcll} 5Z & + & 6X & + & 7Y & = & 0 & :\mathbf{L_3} \\ 3Z & + & 8X & + & 3Y & = & 9 & :\mathbf{L_2} \\ 0 & + & 2X & + & 5Y & = & 7 & :\mathbf{L_1}. \end{array}$$

1.6 Ορισμός: Θα λέμε ότι ένα σύστημα βρίσκεται σε **βαθμωτή** μορφή αν και μόνο αν ο πρώτος μη μηδενικός όρος κάθε εξίσωσης βρίσκεται αριστερότερα του πρώτου μη μηδενικού όρου κάθε εξίσωσης κάτω από αυτήν.

Παράδειγμα: Το πρώτο από τα συστήματα που ακολουθούν βρίσκεται σε βαθμωτή μορφή, το δεύτερο όχι

$$i)\ \begin{array}{rcrcrcl} 2X & + & 5Y & + & 8Z & = & 8 \\ & & 6Y & + & 5Z & = & 7 \\ & & & - & 7Z & = & 0 \end{array}, \qquad ii)\ \begin{array}{rcrcrcl} 2X & + & 5Y & + & 4Z & = & 0 \\ & & 6Y & + & 3Z & = & 0 \\ 3X & + & 8Y & + & 6Z & = & 7. \end{array}$$